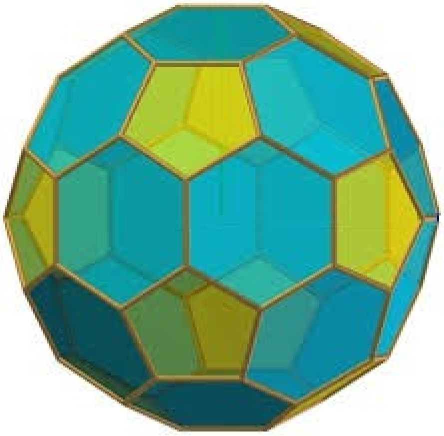
Préparer l'année de 2nde

Livret de mathématiques



“En mathématique, c'est comme dans un roman policier ou un épisode de Columbo : le raisonnement par lequel le détective confond l'assassin est au moins aussi important que la solution du mystère elle-même.”

Cédric Villani
Médaille Field 2010

Ce livret a été conçu pour vous, élèves de troisième qui allez intégrer la classe de seconde à la rentrée de septembre. Il s'agit de fiches reprenant une partie des notions étudiées en 3ème, à traiter avec sérieux pour aborder l'année de 2nde en mathématique dans les meilleures conditions.

C'est aussi un outil à conserver et consulter régulièrement car vous y trouverez les acquis indispensables pour assimiler le programme de 2nde.

Quelques conseils d'organisation :

• Échelonner votre travail sur plusieurs semaines : ne pas commencer la veille de la rentrée.

• S'assurer que l'on maîtrise le rappel de cours avant de faire les exercices en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet abordé.

• Faire attention au soin et à la rédaction : travaillez avec rigueur.

• Si vous ne réussissez pas à faire un exercice, n'abandonnez pas et allez rouvrir vos cahiers de 3ème pour y retrouver un exercice du même type.

• Les exercices avec * demandent un peu plus de recherche.

• Tout au long du dossier, tu vas découvrir différents logos.
Cliquer dessus pour accéder directement aux fiches méthodes, exercices ou les corrections.

Accéder directement à la leçon   Retour au sommaire

C’est en bloquant, en se trompant, en se rendant compte de ses erreurs et en les corrigeant que l’on progresse en mathématiques. En effet, buter sur un problème est la meilleure façon de voir ce qu'il vous a manqué pour arriver au résultat.

Contempler la solution d'un exercice qu'on n'a pas cherché ne fait pas progresser.

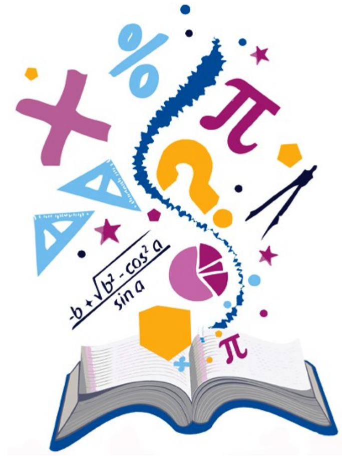
• Cliquer sur le logo CORRECTION en bas de chaque fiche pour voir la correction.

C’est parti !

Sommaire

Rappel 1

Calculs fractionnaires



• Pour additionner et soustraire deux fractions, on doit d'abord les réduire au même dénominateur. On applique ensuite la règle suivante :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

• Pour multiplier deux fractions, on décompose d'abord chacun des numérateurs et dénominateurs en produit de facteurs premiers. Cela permet de simplifier les calculs avant d'appliquer la règle suivante :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

• Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.
Ce qui s'écrit comme cela :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

<u>Rappel</u> : l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

l'inverse de a est $\frac{1}{a}$

Exercice 1 : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{-5}{7} + \frac{4}{21}$	$B = \frac{5}{12} - \frac{3}{8}$	$C = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$	$D = \frac{-7}{9} \div \frac{6}{-14}$	$E = \frac{2}{15} + \frac{18}{5} \times \frac{35}{4}$

Exercice 2 :

Pierre, Jules et Thomas se partagent la fortune de leur père.

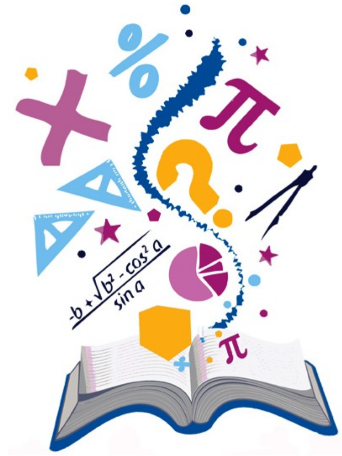
Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Jules les deux cinquièmes et Thomas hérite du reste.

Quelle fraction de la fortune de son père reçoit Thomas ?

CORRECTION

Rappel 2

Calcul Littéral



- Développer un produit signifie le transformer en une somme.
- Factoriser une somme signifie la transformer en un produit.
- Pour développer, on distribue la multiplication sur l'addition et la soustraction :
  - Développement simple : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$
  - Développement double : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Pour factoriser, deux méthodes :
  - on repère des facteurs communs (en s'aidant des tables de multiplication notamment ou en remarquant des blocs parenthèses identiques).
  - On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exercice 1 : Parmi les expressions suivantes, souligner en bleu les sommes et en vert les produits :

$x+3\times5$; $5x+7$; $4(3x + 6)$; $(6x + 4)\times5$; $(4x - 5) - (7x + 3)$; $(x + 6)^2$

Exercice 2 : Parmi les expressions littérales proposées, trouver dans chaque cas celle qui convient et la recopier dans le tableau:

❶ $\frac{2+x}{2}$; ❷ x^2 ; ❸ $2+\frac{x}{2}$; ❹ $2 + x$; ❺ $2x$; ❻ $2x + 3$; ❼ $x + 3\times2$; ❽ $2(x + 3)$

	Expression choisie
La somme de 2 et de x	
Le double de x	
Le carré de x	
La somme de 2 et de la moitié de x	
La moitié de la somme de 2 et de x	
La somme de x et du produit de 3 par 2	
Le produit de 2 par la somme de x et de 3	
La somme du produit de 2 par x et de 3	

Exercice 3 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$A(x) = (2x - 3)(5x - 4)$

$B(x) = 2x(5x - 3) - 7$

*$C(x) = 3x - (x - 1) - (x + 7)(x + 3)$

$D(x) = (x + 5)^2$

$E(x) = (6 + 7x)(6 - 7x)$

$F(x) = (4x - 1)^2$

Exercice 4 : Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = x^2 + 2x$

$B(x) = 7x(x - 4) + (x - 4)^2$

$C(x) = 9x^2 - 12x$

*$D(x) = (x + 1)(2x + 5) - (x + 1)(3x - 4)$

$E(x) = 16x^2 - 1$

*$F(x) = 25 - (2x - 1)^2$

*$G(x) = (2 - x)(3x + 1) + (3x + 1)$

*__Exercice 5 :__ Effectuer sans la calculatrice et astucieusement les calculs suivants (rédiger les intermédiaires) :

$A = 48 \times 99$

$B = 57 \times 101$

*$C = 101^2$

CORRECTION

Rappel 3

Puissances

- Définition d'une puissance avec exposant positif :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Définition d'une puissance avec exposant négatif :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- $a^0 = 1$ sauf pour $a = 0$, dans ce cas $0^n = 0$.

- $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

- Cas des puissances de dix : $10^n = \underbrace{1000\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ zéros}}$

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n \times m}$

- L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal qui ne doit avoir qu'un seul chiffre avant la virgule (mais pas zéro).

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant.

x	10^7	10^{-5}	$\dfrac{1}{10^4}$	$10^{-15} \times 10^{11}$	$\dfrac{10^{16}}{10^9}$	$(10^2)^3$
Écriture décimale de x						

Exercice 2 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

A = 3 789 000 B = 0,000 000 037

Exercice 3 : Compléter ce tableau par l'écriture scientifique de chacune des distances données en km.

Planète	Saturne	Mars	Uranus	Terre
Distance moyenne du soleil	$14{,}3 \times 10^8$	228×10^6	2 880 000 000	$1{,}49 \times 10^8$
Distance moyenne du soleil en écriture scientifique				

Planète	Neptune	Vénus	Jupiter	Mercure
Distance moyenne du soleil	$45\,000 \times 10^5$	11×10^7	778×10^6	$0{,}58 \times 10^8$
Distance moyenne du soleil en écriture scientifique				

*__Exercice 4 :__ La masse d'un atome de carbone est égale à $1{,}99 \times 10^{-26}$ kg.

Les chimistes considèrent des paquets (appelés moles) contenant $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes.

a) Calculer la masse en grammes d'un tel paquet d'atomes de carbone.

b) Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

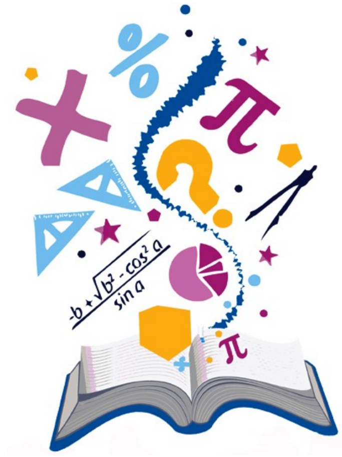
*__Exercice 5 :__ La vitesse de la lumière est d'environ 3×10^8 m/s. La distance Soleil-Pluton est de 5 900 Gm. Calculer le temps en heures mis par la lumière pour aller du Soleil à Pluton.

Rappel : 1Gm = 1 Giga mètre = 10^9 m

CORRECTION

Rappel 4

Équations



• Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'égalité soit vérifiée.

• Équations du premier degré : On regroupe les termes inconnus dans le membre de gauche, puis les termes constants dans le membre de droite, et enfin on divise par le coefficient de l'inconnue.

$$\begin{aligned} 6x - 5 &= 2 && (+\,5) \\ 6x &= 7 && (\div\,6) \\ x &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

La solution est $\frac{7}{6}$.

$$\begin{aligned} 5x + 2 &= 3x - 4 && (-\,3x) \\ 2x + 2 &= -\,4 && (-\,2) \\ 2x &= -\,6 && (\div\,2) \\ x &= -\,3 \end{aligned}$$

La solution est – 3.

• Équation-produit : Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$(3x - 2)(-\,x + 7) = 0$

On sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc : $3x - 2 = 0$ **ou** $-\,x + 7 = 0$

$3x = 2$ **ou** $-\,x = -\,7$

$x = \frac{2}{3}$ **ou** $x = 7$

L'équation admet deux solutions $\frac{2}{3}$ et 7.

$(2 - 3x)(x - 4) - (x - 4)(5 + 2x) = 0$

On factorise :

$(x - 4)((2 - 3x) - (5 + 2x)) = 0$

$(x - 4)(2 - 3x - 5 - 2x) = 0$

$(x - 4)(-\,5x - 3) = 0$

On sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc : $x - 4 = 0$ **ou** $-\,5x - 3 = 0$

$x = 4$ **ou** $-\,5x = 3$

$x = \frac{-3}{5}$

L'équation admet deux solutions 4 et $\frac{-3}{5}$

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes.

E_1 : $3x - 1 = -13$ E_2 : $-2x + 5 = 8$ E_3 : $5x = 0$

E_4 : $4 - x = 7$ E_5 : $11x - 3 = 2x + 9$ E_6 : $\dfrac{x}{7} = \dfrac{-7}{4}$

$E_7 = (-2x - 5)(3x + 2) = 0$

***Exercice 2 :** À un semi-marathon, les organisateurs décident de donner une somme d'argent aux trois premiers. Ils se mettent d'accord pour attribuer $\dfrac{3}{5}$ de la somme totale au vainqueur, $\dfrac{1}{3}$ au second et 200 € au troisième.
Quelle est la somme totale qu'ils décident de distribuer ?

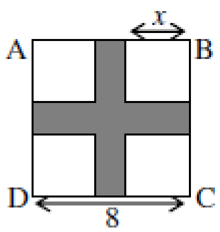
Exercice 3 : On donne le programme de calcul suivant.

• Choisir un nombre • Ajouter 3 • Calculer le carré du résultat • Soustraire 9	**1.** Montrer que, si on choisit le nombre 4, le résultat obtenu est 40. **2.** Exprimer, en fonction du nombre x de départ, le résultat obtenu avec ce programme de calcul. En développant et en réduisant cette expression, montrer que le résultat du programme est $x^2 + 6x$. **3.** Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ? Justifier.

Exercice 4 : On considère l'équation (E) : $(x + 3)(2x - 5) = 5x - 15$

1. Le nombre -1 est-il solution de (E) ?
2. Justifier que 2 est solution de (E).
3. *Prouver qu'il existe un autre nombre solution de (E).

Exercice 5 : L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire le cm².



On considère un carré ABCD de côté 8.

On enlève, comme indiqué sur la figure, quatre petits carrés superposables de côté x ($0 < x < 4$). On obtient ainsi une croix coloriée en gris. On appelle A(x) son aire.

	A	B
1	x	f(x) = 64-4x²
2	0	
3	0,5	
4	1	
5	1,5	
6	2	
7	2,5	
8	3	
9	3,5	
10	4	

1. Montrer que A(x) = $64 - 4x^2$.
2. Voici une copie de la feuille de calcul réalisée sur tableur. Quelle formule doit-on saisir en B2 ?
3. En étirant la formule vers le bas, pour quelle valeur de x l'aire de la croix grise vaut 15 cm² ?

CORRECTION

Rappel 5

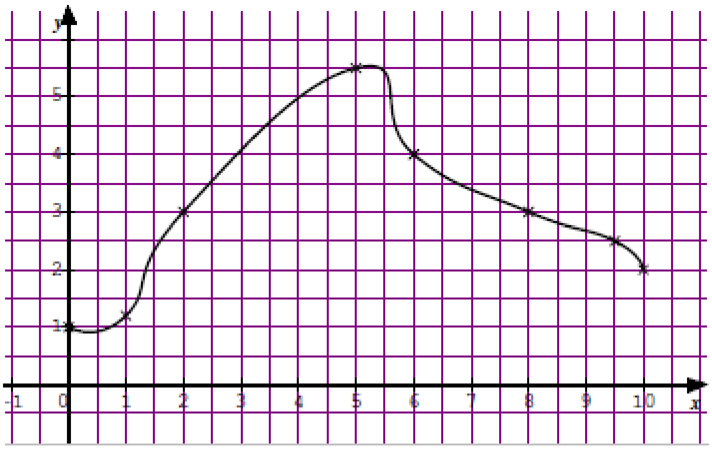
Fonctions - Généralités

• Une **fonction** est un processus qui, à chaque valeur du nombre x, associe un unique nombre y, noté $f(x)$, appelé l'**image de x par f**. On écrit $f : x \to f(x)$.

On dit que x est **un antécédent** de y par f lorsque $y = f(x)$.

La **représentation graphique de f** est l'ensemble de tous les points de coordonnées (x ; $f(x)$).

<u>Exemple 1 :</u> le graphique ci-contre définit une fonction f, qui, à chaque nombre x compris entre 0 et 10, associe le nombre $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.
Ainsi $f(2) = 3$, $f(10) = 2$, $f(9{,}5) \approx 2{,}5$.
Les antécédents de 3 par f sont 2 et 8.
1,5 n'a qu'un seul antécédent par f et 6 n'a pas d'antécédent par f.



<u>Exemple 2 :</u> $g : x \to x(2 - x)$. On peut calculer précisément les valeurs des images voulues.
Ainsi $g(2) = 0$, $g(-50) = -2600$. (On a remplacé x par 2 d'abord dans $x(2 - x)$ puis ensuite par − 50).
Les antécédents de 0 par g sont 0 et 2. (On a résolu l'équation-produit $x(2 - x) = 0$)

<u>Exemple 3 :</u> Le tableau de valeurs ci-dessous définit une fonction h.

x	−1	3	3,5	0	7	−2
$h(x)$	0	2	−2	2	−5,5	− 1

Ainsi $h(-1) = 0$, $h(7) = -5{,}5$.
Les antécédents de 2 par h sont 3 et 0.

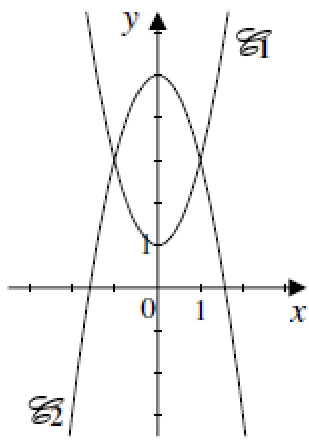
Exercice 1 : On considère une fonction f telle que $f(2) = 5$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Répondre en barrant les mauvaises réponses parmi "VRAI", "FAUX" et "On ne peut rien dire.

1.	L'image de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
2.	L'image de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
3.	Un antécédent de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
4.	Un antécédent de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
5.	Un nombre dont l'image est 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
6.	2 a pour image 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
7.	Un nombre dont l'image est 7 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
8.	5 a pour antécédent 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
9.	2 a pour antécédent 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
10.	2 a pour image 7 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
11.	5 a pour image 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
12.	Le point de coordonnées (2 ; 5) appartient à $\mathcal{C}$.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
13.	Le point de coordonnées (5 ; 2) appartient à $\mathcal{C}$.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire

Exercice 2 : Sur le graphique ci-contre la courbe $\mathcal{C}_1$ représente une fonction f et la courbe $\mathcal{C}_2$ représente une fonction g. Répondre aux questions par lecture graphique (avec la précision permise par le tracé).

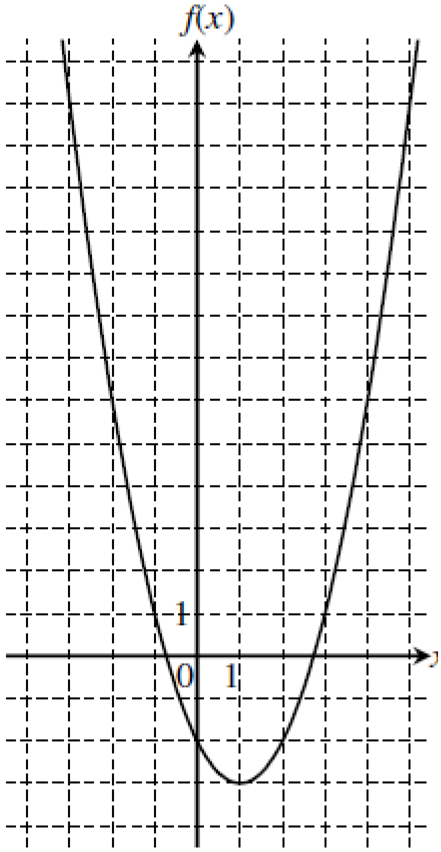


1. Quelle est l'image de 2 par la fonction g ?
2. Quels sont les antécédents de 4 par la fonction g ?
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = g(x)$? Quelle est alors l'image de ces valeurs par f et g ?

Exercice 3 : On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = 4x^2$

1. Déterminer l'image de − 3 par la fonction f.
2. Déterminer l'antécédent de 24 par la fonction f.
3. Déterminer l'image de 3 par la fonction g.
4. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 8 par la fonction g.

Exercice 4 : Le graphique ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)^2 - 3$.



<u>Résolution par lecture graphique</u>

1. Quelles sont les images des nombres 1 et -2 par f ?
2. Quels sont les antécédents par f du nombre -2 ?
3. Le nombre -3 admet-il des antécédents ? (expliquer).

*<u>Résolution par le calcul</u>

1. Calculer l'image par f de 0 et de 2. Quel résultat trouve-t-on ?
2. **a)** Montrer que rechercher les antécédents par f de 13 revient à résoudre l'équation $(x - 1)^2 - 16 = 0$.

   b) Montrer que, pour tout nombre x, on a :

   $(x - 1)^2 - 16 = (x - 5)(x + 3)$.

   c) En déduire les antécédents de 13 par f.

Exercice 5 : On considère une fonction f et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Compléter le tableau suivant.

Égalité	Description : image ou antécédent	Point appartenant à $\mathcal{C}$
$f(-2) = -1$	… est l'image de … par f	(… ; …) $\in \mathcal{C}$
$f(\ldots) = \ldots$	… est l'image de … par f	(5 ; 7) $\in \mathcal{C}$
$f(\ldots) = \ldots$	4 est un antécédent de -10 par f	(… ; …) $\in \mathcal{C}$
$f(\ldots) = \ldots$	… est un antécédent de … par f	(-3 ; 2) $\in \mathcal{C}$

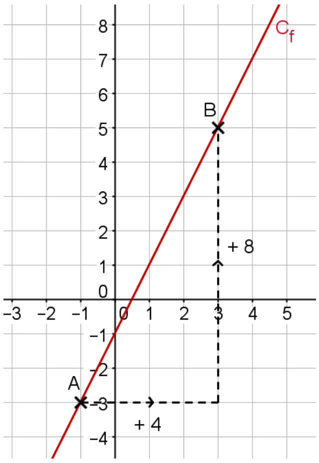
CORRECTION

Rappel 6

Fonctions affines

• Une **fonction affine** est une fonction est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$.
Par exemple :
$f : x \rightarrow 2x - 1$ est une fonction affine
car elle est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 2$ et $b = -1$.

• La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur (ou pente)** de la droite.
Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Par exemple :
Sur la représentation graphique ci-contre, on choisit deux points A et B sur la courbe. En se déplaçant de A vers B, on se dirige de + 4 à l'horizontal et de + 8 à la verticale.



La pente se calcule ainsi : $\dfrac{\text{Déplacement vertical}}{\text{Déplacement horizontal}} = \dfrac{+8}{+4} = 2$
De plus l'ordonnée à l'origine se trouve à l'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées : ici − 1.

On résume : $a = 2$ et $b = -1$.
Donc cette représentation graphique est celle de la fonction $f(x) = 2x - 1$.

• Une fonction **linéaire** est de la forme $f(x) = ax$.
Par exemple :
$f : x \rightarrow \dfrac{-1}{3}x$ est une fonction linéaire car elle est de la forme $f(x) = ax$ avec $a = \dfrac{-1}{3}$

• La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite qui passe par l'origine du repère**.

• Les fonctions linéaires modélisent des **situations de proportionnalité**.

• Pourcentage et fonctions linéaires

	Prendre 5% de x, c'est multiplier x par 0,05.	Augmenter x de 5% c'est multiplier x par 1,05.	Diminuer x de 5% c'est multiplier x par 0,95.
Expression littérale	5% de x = $0{,}05x$	x + 5% de x $(1 + 0{,}05)x = 1{,}05x$	x − 5% de x $= (1 - 0{,}05)x = 0{,}95x$
Fonction linéaire	$x \rightarrow 0{,}05x$	$x \rightarrow 1{,}05x$	$x \rightarrow 0{,}95x$

Exercice 1 : Parmi ces fonctions, détermine

$f : x \to 4x - 3$ $g : x \to 5 - 2x$ $h : x \to 3x^2 + 5$

$i : x \to 4{,}5x$ $j : x \to -4$ $k : x \to \dfrac{1}{x}$

a) Celles qui sont affines ; **b)** Celles qui sont linéaires ; **c)** Celles qui sont constantes ; **d)** Celles qui ne sont pas affines.

Exercice 2 : Représenter les fonctions suivantes en expliquant la démarche et les calculs.

a) $f(x) = -3x$

b) $g(x) = -2$

c) $h(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$

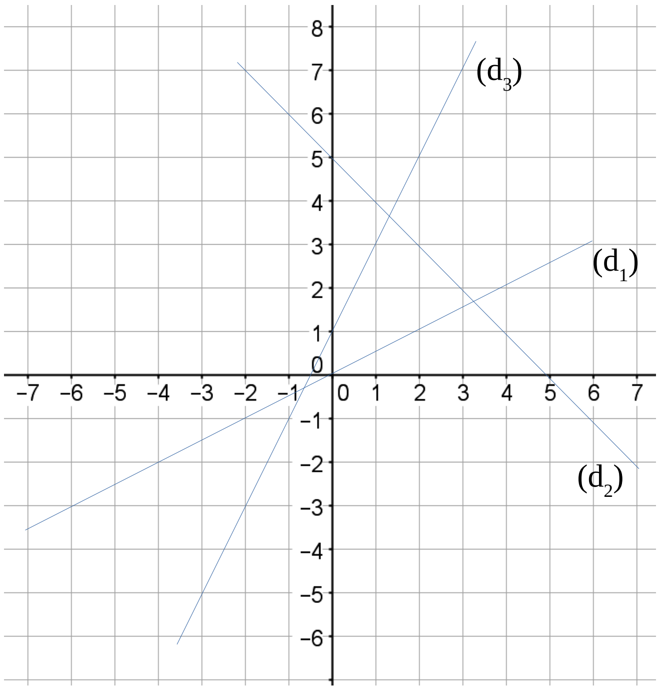
d) $i(x) = 2x - 5$

e) $j(x) = \dfrac{-5}{3}x$

Exercice 3 :

Déterminer graphiquement les fonctions représentées par les droites (d_1), (d_2) et (d_3) ci-contre.

Expliquer.



Exercice 4 : Déterminer la fonction linéaire associée à chacune des expressions suivantes.

a) Hausse de 2 % **b)** Baisse de 40 % **c)** Prendre 65 %

*__Exercice 5 :__

Baisser une quantité de 2 % deux fois de suite revient-il à la baisser de 4 % ?

*__Exercice 6 :__

Un article coûte 58,40 € après avoir subi une remise de 20 %. Quel était son prix d'origine ?

CORRECTION

Rappel 7

Statistiques

• **Fréquence** = $\dfrac{\text{Effectif}}{\text{Effectif total}}$

• Moyenne : Répartition équitable d'une quantité totale sur un effectif total.

• Pour calculer une **moyenne simple** : $\dfrac{\text{Somme des valeurs}}{\text{Effectif total}}$

• Pour calculer une **moyenne pondérée** : $\dfrac{\text{Somme des produits } Valeur \times effectif}{\text{Effectif total}}$

• L'**étendue** d'une série : Plus grande valeur – Plus petite valeur

• Lorsque les valeurs d'une série sont rangées dans l'ordre croissant, la **médiane** est la valeur centrale (ou la moyenne des valeurs lorsque l'effectif est pair).

Exemple :
Ce tableau présente la répartition des prix hors taxes pratiqués dans 28 pays de l'Union Européenne pour une même automobile neuve.
a) Déterminer le prix moyen et interpréter ce résultat.
b) Déterminer le prix médian et interpréter ce résultat.
c) Calculer l'étendue de la série et interpréter ce résultat.

Prix (en milliers d'€)	11	12	13	14	15	16	17
Effectif des pays	9	4	11	2	1	0	1

Solution
a) Prix total (en milliers d'euros) de l'ensemble des voitures :
$11\times9 + 12\times4 + ... + 17\times1 = 350$
Nombre total de pays : 28
Prix moyen par pays : $350 \div 28 = 12,5$ milliers d'€
Cela signifie que si le véhicule coûtait le même prix dans tous les pays de l'Union Européenne, ce prix serait de 12 500 €.
b) Comme il y a 28 pays, la médiane est la moyenne des 14^{e} et 15^{e} valeurs.

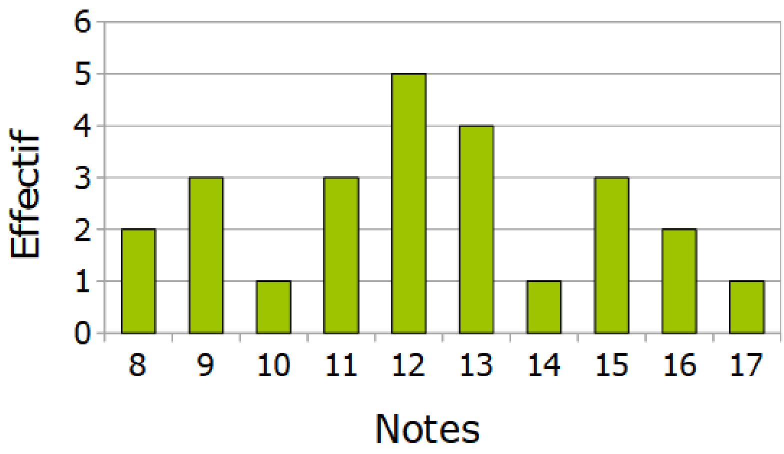
Prix (en milliers d'€)	11	12	13	14	15	16	17
Effectif des pays	9	4	11	2	1	0	1
E.C.C.	9	13	24	26	27	27	28

D'après les effectifs cumulés croissant, les 14^{e} et 15^{e} valeurs sont égales à 13.
La médiane de 13 milliers d'€ signifie qu'il y a autant de voitures dans l'UE qui coûtent 13 000 € ou + que de voitures du même modèle qui coûtent 13 000 € ou –.
c) 17 – 11 = 6. L'étendue est de 6 000 €. Cela signifie que la différence de prix pour une même voiture peut aller jusqu'à 6 000 € selon le pays de l'UE.

Exercice 1 : Déterminer la médiane et l'étendue ces séries suivantes.

a) 14 ; 26 ; 11 ; 33 ; 41 ; 13 **b)** 37,2 ; 39,4 ; 38 ; 38,2 ; 39 ; 38,6

Exercice 2 : Voici les notes obtenues par une classe de 3^e à un devoir.



1. Déterminer la moyenne et la médiane des notes et interpréter ces résultats.

2. Calculer l'étendue et interpréter le résultat.

Exercice 3 : Un fabriquant a relevé le nombre de biscuits brisés dans un paquet.

Nombre de biscuits brisés	2	4	6	9	13
Effectif	5	8	7	2	1

En moyenne, combien y-a-t-il de biscuits brisés par paquet ?

Exercice 4 : Voici le relevé de longueurs des gousses de vanille d'un cultivateur.

Longueur (en cm)	12	15	17	22	23
Effectif	600	800	1 800	1 200	600

1. Quel est l'effectif total de cette production ?

2. Le cultivateur peut seulement les conditionner dans des tubes de 20 cm de long. Quel pourcentage de cette production a-t-il pu conditionner sans plier les gousses ?

*La chambre d'agriculture décerne un label de qualité aux agriculteurs si :
• la longueur moyenne des gousses est supérieure ou égale à 16,5 cm ;
• et la médiane de leur production est supérieure à 17,5 cm.

3. Ce cultivateur pourra-t-il recevoir ce label de qualité ?

CORRECTION

Rappel 8

Probabilités

• Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.

• Une **issue** est le résultat d'une expérience aléatoire.

• Un ensemble d'issues est appelé **événement**.

• L'**événement contraire** d'un événement A est noté $\overline{A}$. C'est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

• Des **événements** sont **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue en commun.

• Si A est un événement, alors $p(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$

• Une probabilité est comprise entre 0 et 1.

• La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Exercice 1 : Pierre participe à un jeu. Trois verres retournés sont disposés sur une table. Une pièce est cachée sous l'un de ces verres. Pierre choisit un des verres et le soulève.

1. Quelle est la probabilité que Pierre trouve la pièce ?
2. On modifie la règle du jeu : il y a désormais cinq verres et deux pièces, les deux pièces sont cachées sous deux verres distincts. Pierre a-t-il plus de chance de trouver une pièce ?

Exercice 2 : Une expérience aléatoire admet exactement quatre issues, notées A, B, C et D. Sachant que $p(A) = \dfrac{1}{5}$, $p(B) = \dfrac{2}{15}$ et $p(D) = \dfrac{1}{3}$, calculer p(C).

*__Exercice 3 :__ Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Une boule porte le nombre 1, deux boules portent le nombre 2, une boule porte le nombre 3.

On tire au hasard successivement et sans remise, deux boules et on additionne les nombres qu'elles portent.
1) Faire un arbre de la situation.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 ?

Exercice 4 : Dans un laboratoire, on élève des souris dont voici des caractéristiques :

Souris	Mâle	Femelle	Total
Blanche	30		
Grise		8	
Total	37		120

1. Compléter le tableau.

Dans la suite de l'exercice les résultats seront arrondis au centième.

2. On prend une souris parfaitement au hasard pour une expérience.

  a) Calculer la probabilité de sélectionner une souris blanche.

  b) Calculer la probabilité de sélectionner une souris femelle.

  c) Calculer la probabilité de sélectionner un mâle gris.

3. On prend une souris blanche. Quelle est la probabilité que ce soit une femelle ?

***Exercice 5 :** On dispose de morceaux de papiers identiques. On écrit 1 sur l'un d'eux ; on écrit 2 sur deux autres ; on écrit 3 sur trois autres, jusqu'à ce qu'on écrive 10 sur dix autres papiers. On place tous ces papiers dans une urne et on en tire un au hasard.

1. De combien de morceaux de papiers dispose-t-on ?

2. Quelle est la probabilité de l'événement "le nombre obtenu est pair" ?

CORRECTION

Rappel 9

Arithmétique

• Connaître les critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 et 10.

• Pour chercher la liste des diviseurs d'un nombre, on peut présenter de cette façon :
Voici par exemple, les diviseurs de 48.

1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

• Un nombre est premier s'il n'est divisible que 1 et par lui-même (il n'admet donc que 2 diviseurs).
Exemple pour déterminer si un grand nombre comme 547 est premier.
On calcule : $\sqrt{547}$ ≈ 23,38... Pour déterminer si 547 est un nombre premier, il suffit de savoir s'il est divisible par l'un des nombres premiers compris entre 2 et 23,38...
Or 547 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7,ni par 11,ni par 13,ni par 17,ni par 19,ni par 23.
On conclut que 547 n'admet que 2 diviseurs qui sont 1 et 547. Il est donc premier.

• Tous les nombres entiers peuvent se décomposer en un produit de facteurs premiers.
Par exemple : $1\,246 = 2 \times 7 \times 89$

• Décomposer les numérateur et dénominateur d'une fraction permet de la rendre irréductible.

Par exemple : $\dfrac{585}{1275} = \dfrac{3^2 \times 5 \times 13}{3 \times 5^2 \times 17} = \dfrac{3 \times 13}{5 \times 17} = \dfrac{39}{85}$

• Le PGCD de 175 et de 1 470 est le Plus Grand Diviseur Commun à 175 et 1 470.
On le trouve en considérant les facteurs communs aux deux décompositions et on les prend avec le plus petit des exposants qui apparaît.
$175 = 5^2 \times 7$
$1\,470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$
PGCD(175 ; 1 470) = $5 \times 7 = 35$

• Le PPCM de 175 et de 1 470 est le Plus Petit Commun Multiple à 175 et 1 470.
On le trouve en considérant tous les facteurs des deux décompositions et on les prend avec le plus grand des exposants qui apparaît.
$175 = 5^2 \times 7$
$1\,470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$
PPCM(175 ; 1 470) = $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 = 7\,350$

Exercice 1 : Écrire la liste de tous les diviseurs de 32 ; 67 ; 81 et 144.

***Exercice 2 :** Soit k un nombre entier et $a = 10k$, $b = 6k$ pour toutes les valeurs de k.

- Est-ce que a est un multiple de 2 ?
- Est-ce que b est un multiple de 3 ?
- Est-ce que 8 est un diviseur de $a+b$?
- Est-ce que 8 est un diviseur de ab ?

Exercice 3 : Déterminer la liste des multiples de 7 entre 100 et 150.

***Exercice 4 :** Explique pourquoi le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

Exercice 5 : Entoure les nombres qui sont premiers (justifie à chaque fois ton choix), puis donne une décomposition en produit de facteurs premiers de tous ceux que tu n'as pas entourés.

32	59	115	187	841
227	303	503	667	883

Exercice 6 :

1. La fraction $\frac{1080}{288}$ est-elle irréductible ? Si elle ne l'est pas, la rendre irréductible. Justifiez toutes vos réponses.

***2.** Même question avec la fraction $\frac{12789}{5481}$.

Exercice 7 :

1. a) PGCD(45 ; 63) **b)** PGCD(48 ; 180) **c)**PGCD(840 ; 532)

2. a) PPCM(6 ; 9) **b)** PPCM(54 ; 45) **c)** PPCM(90 ; 125)

Exercice 8 :

Un fleuriste dispose de 30 tulipes et 24 muscaris. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de tulipes et le même nombre de muscaris et utiliser toutes ses fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut faire.

1. Expliquer pourquoi le nombre de bouquets est le PGCD de 30 et 24.

2. Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ? Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

*__Exercice 9 :__ Dans une partie de cartes, on doit répartir entre les joueurs 180 jetons noirs et 120 jetons blancs. Chaque joueur doit recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.

1. Peut-il y avoir 20 joueurs ? 9 joueurs ?

2. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donner toutes les possibilités.

Exercice 10 : La montre de Jade sonne toutes les 12 heures et son réveil sonne toutes les 15 heures. Ils ont tous deux sonné le 21 septembre à 18h30.

Quand sonneront-ils de nouveau en même temps ?

CORRECTION

Rappel 10

Égalité de Pythagore

- **Calculer une longueur dans le triangle rectangle** :

Si le triangle ABC est rectangle en A d'après le **théorème de Pythagore** :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ [BC] est l'hypoténuse (le côté le plus long)

Si on cherche la longueur de l'**hypoténuse** :

$BC^2 = \ldots^2 + \ldots^2 = \ldots$ donc $BC = \sqrt{\ldots}$

Si on cherche la longueur d'un **côté de l'angle droit** :

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = \ldots^2 - \ldots^2 = \ldots$ donc $AB = \sqrt{\ldots}$

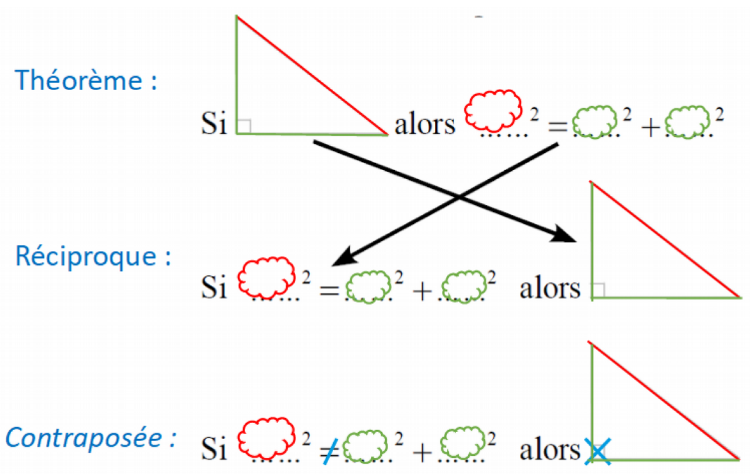
- **Montrer si un triangle est rectangle ou pas** :

L'égalité de Pythagore n'est vraie que dans un triangle rectangle : c'est une propriété caractéristique du triangle rectangle.

- si l'égalité de Pythagore est vérifiée alors le triangle est rectangle → Réciproque du théorème de Pythagore
- si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle → Contraposée du théorème de Pythagore

MÉTHODE : **Pour savoir si un triangle est rectangle**

- On repère le plus grand côté du triangle et on calcule son carré
- On calcule la somme des carrés des deux autres côtés
- On regarde si l'égalité est vérifiée et on conclut



Exercice 1 :

ARC est un triangle rectangle en R tel que AC = 52 mm et RC = 48 mm.

Calculer la longueur AR.

Exercice 2 :

Le triangle PIE est rectangle en I tel que : IP = 7 cm et IE = 4 cm.

Quelle est la valeur exacte de PE ?

Exercice 3 :

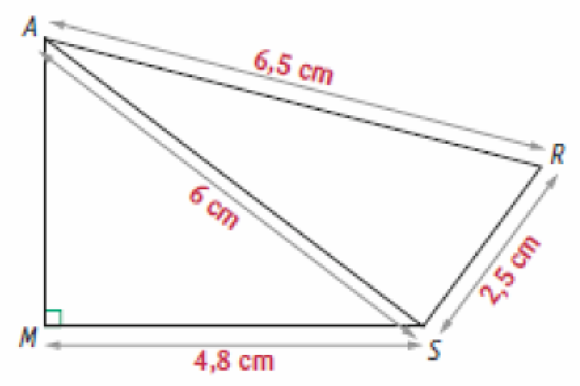
Soit MNP un triangle tel que MN = 9,6 cm ; MP = 4 cm et NP = 10,3 cm.

Ce triangle est-il rectangle ?

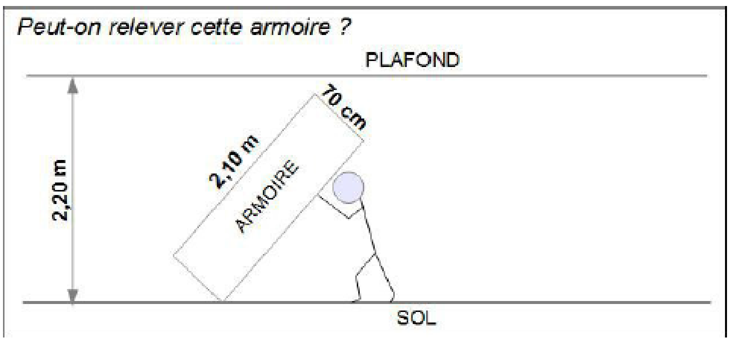
Exercice 4 :

On considère la figure MARS ci-contre.

1. Déterminer la longueur AM.
2. Déterminer la nature du triangle RAS.



Exercice 5 :

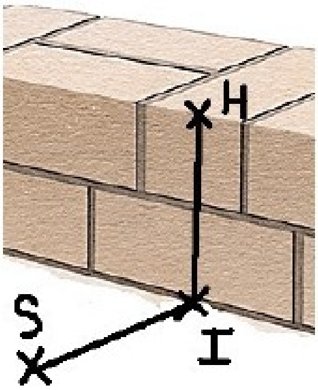


Fabien souhaite relever cette armoire rectangulaire en la faisant basculer sur le sol.

Pourra-t-il la relever ?

Justifier votre réponse.

Exercice 6 :



Au lycée professionnel, Ben, futur maçon s'entraîne en construisant un mur.

Son professeur, M. Ecker vient vérifier si celui-ci est bien droit (c'est-à-dire perpendiculaire au sol).

Ayant oublié sa caisse à outils dans son atelier, il ne possède que le mètre ruban qu'il avait dans la poche.

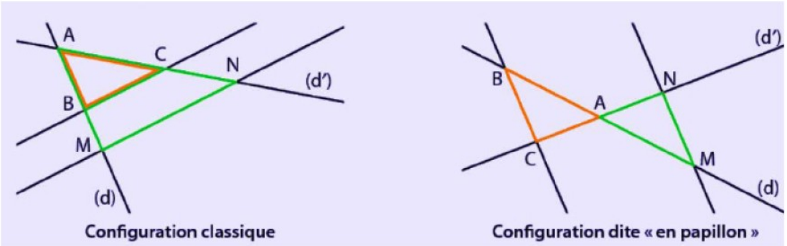
Il plante au pied du mur un point I, puis un point H à 60 cm de hauteur sur le mur et un autre point S au sol à 80 cm de I. Il mesure ensuite la longueur HS et trouve 95 cm.

Le mur de Ben est-il droit ?

CORRECTION

Rappel 11

Égalité de Thalès



• **<u>Calculer une longueur</u>** : Si les points A, M et B sont distincts et alignés ainsi que les points A, N et C, et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Alors

- les triangles AMN et ABC sont <u>semblables</u>
- le triangle ABC est <u>l'image</u> du triangle AMN par <u>une homothétie de centre A</u>
- le triangle ABC est <u>un agrandissement ou une réduction</u> du triangle AMN.
- les <u>longueurs</u> des triangles AMN et ABC sont <u>proportionnelles</u>
- Le tableau suivant

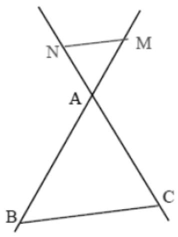
Longueurs des côtés du triangle AMN			
Longueurs des côtés du triangle ABC			

est un tableau de <u>proportionnalité</u>

- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ou $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

On associe bien les longueurs entre elles : AM avec AB car les points A, M et B sont alignés...

• **<u>Montrer que deux droites sont parallèles ou pas</u>** :



Ce que l'on doit rédiger :

Les points A, B, M sont distincts et alignés ainsi que A, C, N **<u>dans le même ordre</u>**

Repasse les deux triangles pour lesquels on doit vérifier que les longueurs sont proportionnelles ou non !

On calcule <u>SÉPARÉMENT</u> les deux quotients

Calculons :

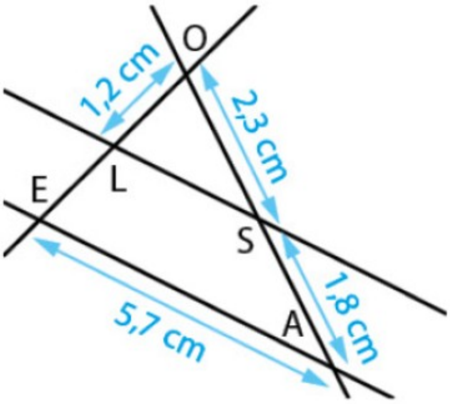
D'une part : $\frac{AM}{AB} = \frac{...}{...} = ...$ D'autre part : $\frac{AN}{AC} = \frac{...}{...} = ...$

On compare les deux quotients : 2 cas possibles

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$	$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$
On applique : la **<u>réciproque du théorème de Thalès</u>** On obtient : les droites (MN) et (BC) sont parallèles.	On ne peut pas appliquer la réciproque du théorème de Thalès, (mais la contraposée du théorème de Thalès) les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exercice 1 :

Les droites (LS) et (EA) sont parallèles.

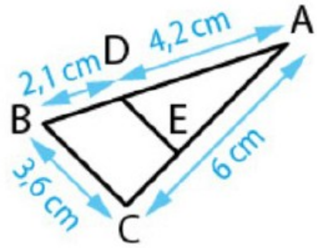


Déterminer une valeur approchée au mm près des longueurs LE et LS dans la figure

Exercice 2 :

Dans la figure ci-contre, les triangles ABC et ADE sont images l'un de l'autre par une homothétie.

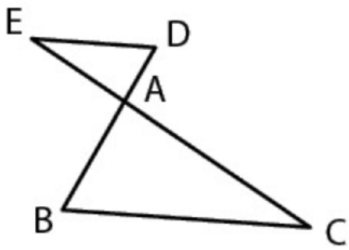
- Caculer les longueurs DE et AE.



Exercice 3 :

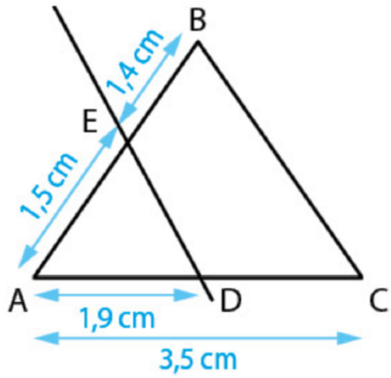
On considère la figure ci-contre.
On donne les mesures suivantes :
AD = 3,4 cm, AB = 6,8 cm, AE = 3,2 cm
et AC = 6,4 cm.

- Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?



Exercice 4 :

Montrer que les droites (ED) et (BC) ne sont pas parallèles dans la figure ci-dessous.

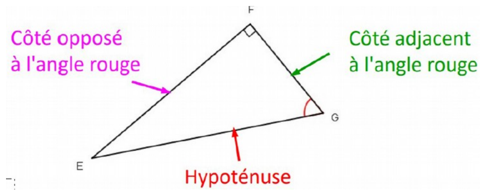


CORRECTION

Rappel 12

Trigonométrie

•**Fonctions trigonométriques** : On considère le triangle EFG rectangle en F ci-dessous :



Fonction « cosinus »

Fonction « sinus »

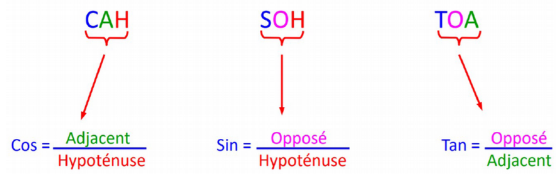
Fonction « tangente »

$$\text{Cos } \widehat{EGF} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{FG}{EG}$$

$$\text{Sin } \widehat{EGF} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{EF}{EG}$$

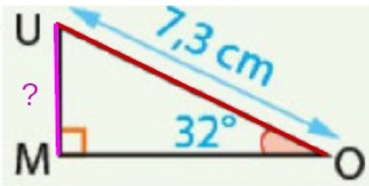
$$\text{Tan } \widehat{EGF} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{EF}{FG}$$

Toujours compris entre 0 et 1



•**Calculer une longueur** :

Exemple : Déterminer la longueur arrondie au mm du côté [UM] du triangle UMO ci-contre.



Solution :

Dans le triangle UMO rectangle en M, je connais la longueur de l'hypoténuse et la mesure de l'angle $\widehat{UOM}$ et je cherche la longueur du côté opposé à cet angle , je vais donc utiliser le sinus de l'angle.

$$\sin(\widehat{UOM}) = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{UOM}) = \frac{UM}{UO}$$

$$\text{donc} \quad UM = UO \times \sin(\widehat{UOM})$$

$$UM = 7{,}3\,cm \times \sin(32°)$$

$$UM \simeq 3{,}9\,cm \quad \text{(arrondi au mm)}$$

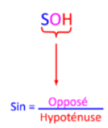
•**Calculer un angle** :

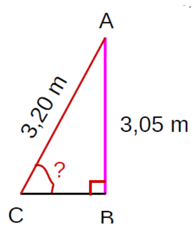
Dans le triangle ABC rectangle en B :

par rapport à l'angle $\widehat{ACB}$ on connaît AC qui correspond à l'hypoténuse

et AB qui correspond au côté opposé.

On va donc utiliser la fonction sinus.





$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3{,}05}{3{,}20}$$

donc $\widehat{ACB} = \sin^{-1}(\frac{3{,}05}{3{,}20}) \approx 72{,}3875\ldots$

*On va utiliser la **fonction inverse** de sinus : **sin⁻¹***
*Il faut appuyer sur **« 2nd »** avant de taper sur **« sin »** puis on écrit le calcul ...*
→ « Arcsin » s'affiche à l'écran

L'arrondi au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$ est 72°.

Exercice 1 :

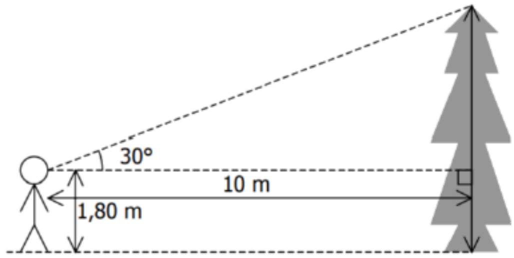
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et BC = 7 cm.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Arrondir à l'unité.

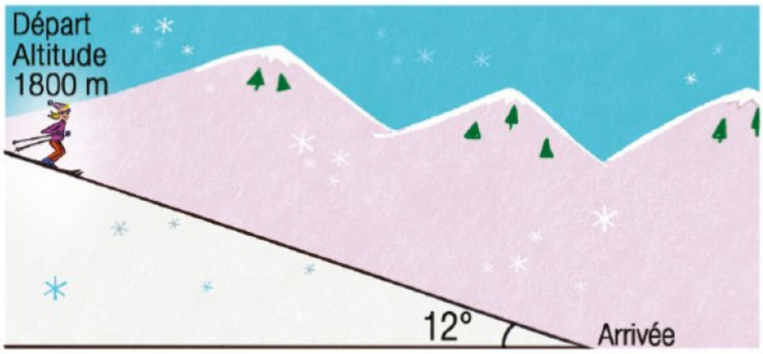
Exercice 2 :

Un personnage mesurant 1,80 m se trouve à 10 m du pied d'un arbre. Alors qu'il regarde la cime, son regard fait un angle de 30° avec l'horizontale.

Quelle est la hauteur de l'arbre (arrondie au dm)?



Exercice 3 :



Emma skie sur une pente faisant un angle de 12° avec l'horizontale.

La longueur de la piste est de 2 000 m.

Au départ, Emma se trouve à une altitude de 1 800 m.

A quelle altitude se trouve l'arrivée ?

CORRECTION

Rappel 13

Solides et volumes

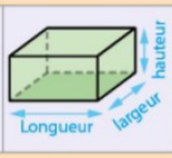
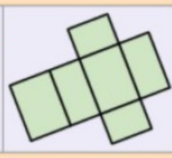
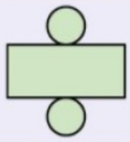
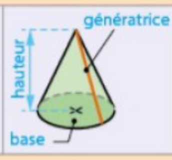
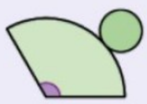
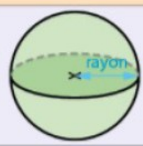
•Solides :

Solides « droits »

$\mathcal{V}$ = Aire de la base × hauteur

Solides « pointus »

$\mathcal{V} = \boxed{\frac{1}{3}}$ Aire de la base × hauteur

Définitions 4	Perspective cavalière	Patron	Volume
Parallélépipède rectangle (ou pavé droit)			
Solide composé de six faces rectangulaires. Cas particulier : le cube.			$\mathcal{V}$ = Longueur × largeur × hauteur
Cylindre de révolution			
Solide composé : • de deux faces parallèles et superposables en forme de disque (les bases) ; • d'une surface latérale non plane.			$\mathcal{V}$ = Aire de la base × hauteur $= \pi r^2 h$
Pyramide			
Solide composé : • d'un sommet S ; • d'une base polygonale ne contenant pas S ; • de faces latérales triangulaires de sommet S.			$\mathcal{V} = \frac{1}{3}$ Aire de la base × hauteur
Cône de révolution			
Solide composé : • d'une base en forme de disque ; • d'un sommet S situé sur la perpendiculaire à la base passant par son centre ; • d'une surface latérale non plane.			$\mathcal{V} = \frac{1}{3}$ Aire de la base × hauteur $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Sphère et boule			
• La sphère (ou la boule) de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM = r (ou OM ⩽ r).		Pas de patron	$\mathcal{A} = 4\pi r^2$ $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Exercice 1 :

Léo a obtenu 2,7 litres de confiture.
Il la verse dans des pots cylindriques de 6 cm de diamètre et de 12 cm de haut, qu'il remplit jusqu'à 1 cm du bord.

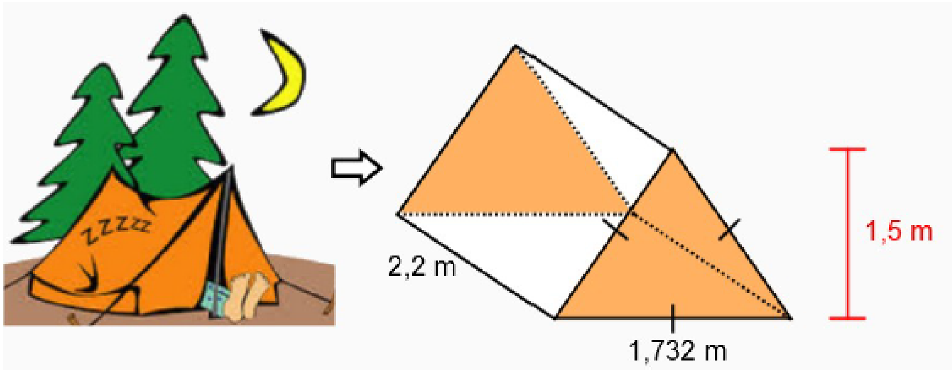
1. Combien pourra-t-il remplir de pots ?

Il colle ensuite sur ses pots une étiquette rectangulaire de fond blanc qui recouvre toute la surface latérale du pot.

2. Montrer que la longueur de l'étiquette est d'environ 18,8 cm.

Exercice 2 :

Afin de s'assurer de faire un bon achat, un campeur s'interroge sur l'espace habitable de cette tente:



Pour être confortable, il veut s'assurer d'avoir un minimum de 3 m³ d'espace.
En considérant cette contrainte, devrait-il se procurer cet abri ?

CORRECTION

Hâte de savoir ce qui t'attend en seconde ?

Ctr - Clique : ***ICI*** !!
Ou scanne ce QRCode :

CORRECTION

Calculs fractionnaires

Exercice 1 : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{-5}{7} + \frac{4}{21}$

Comme 21 est un multiple de 7, on choisit 21 comme dénominateur commun !

$A = \frac{-5\times3}{7\times3} + \frac{4}{21}$

$A = \frac{-15}{21} + \frac{4}{21}$

$A = \frac{-15+4}{21}$

$A = -\frac{11}{21}$

$B = \frac{5}{12} - \frac{3}{8}$

Comme 24 est un multiple de 12 et de 8, on choisit 24 comme dénominateur commun !

$B = \frac{5\times2}{12\times2} - \frac{3\times3}{8\times3}$

$B = \frac{10}{24} - \frac{9}{24}$

$B = \frac{10-9}{24}$

$B = \frac{1}{24}$

$C = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$

C'est une multiplication donc pas de mise au même dénominateur…

$C = \frac{2\times1}{3\times8}$

On simplifie AVANT de calculer

$C = \frac{2\times1}{3\times8}$

$C = \frac{2\times1}{3\times2\times4}$

$C = \frac{\cancel{2}\times1}{3\times\cancel{2}\times4}$

$C = \frac{1}{12}$

$D = \frac{-7}{9} \div \frac{6}{-14}$

C'est une division donc on multiplie par l'inverse…

$D = \frac{-7}{9} \text{ x } \frac{-14}{6}$

Il y a 2 facteurs négatifs, donc le résultat est positif

$D = +\frac{7\times14}{9\times6}$

On décompose pour simplifier !

$D = \frac{7\times7\times2}{3\times3\times3\times2}$

$D = \frac{7\times7\times\cancel{2}}{3\times3\times3\times\cancel{2}}$

$D = \frac{49}{27}$

$E = \frac{2}{15} + \frac{18}{5} \times \frac{35}{4}$

Il faut respecter les priorités de calcul, donc on commence par la multiplication !

$E = \frac{2}{15} + \frac{18\times35}{5\times4}$

$E = \frac{2}{15} + \frac{9\times2\times7\times5}{5\times2\times2}$

$E = \frac{2}{15} + \frac{9\times\cancel{2}\times7\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{2}\times2}$

$E = \frac{2}{15} + \frac{63}{2}$

$E = \frac{2\times2}{15\times2} + \frac{63\times15}{2\times15}$

$E = \frac{4}{30} + \frac{945}{30}$

$E = \frac{949}{30}$

*__Exercice 2__ :

Pierre, Jules et Thomas se partagent la fortune de leur père.

Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Jules les deux cinquièmes et Thomas hérite du reste.

Quelle fraction de la fortune de son père reçoit Thomas ?

On peut regrouper les calculs en une seule expression ou calculer par étapes !

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) &= 1-\left(\frac{1\times5}{3\times5}+\frac{2\times3}{5\times3}\right) \\
&= 1-\left(\frac{5}{15}+\frac{6}{15}\right) \\
&= 1-\frac{11}{15} \\
&= \frac{15}{15}-\frac{11}{15} \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

CORRECTION

Calcul littéral

Exercice 1 :

Parmi les expressions suivantes, souligner en bleu les sommes et en vert les produits.

$\underline{x+3\times5}$; $\underline{5x+7}$; $\underline{4(3x + 6)}$; $\underline{(6x + 4)\times5}$; $\underline{(4x - 5) - (7x + 3)}$; $\underline{(x + 6)^2}$

Exercice 2 :

	Expression choisie
La somme de 2 et de x	❹ $2 + x$
Le double de x	❺ $2x$
Le carré de x	❷ x^2
La somme de 2 et de la moitié de x	❸ $2+\frac{x}{2}$
La moitié de la somme de 2 et de x	❶ $\frac{2+x}{2}$
La somme de x et du produit de 3 par 2	❼ $x + 3\times2$
Le produit de 2 par la somme de x et de 3	❽ $2(x + 3)$
La somme du produit de 2 par x et de 3	❻ $2x + 3$

Exercice 3 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$A(x)=(2x-3)(5x-4)$

$A(x)=(2x-3)\times(5x-4)$

$A(x)=2x\times5x+2x\times(-4)-3\times5x-3\times(-4)$

$A(x)=10x^2-8x-15x+12$

$A(x)=10x^2-23x+12$

$B(x)=2x(5x-3)-7$

$B(x)=2x\times(5x-3)-7$

$B(x)=2x\times5x-2x\times3-7$

$B(x)=10x^2-6x-7$

* $C(x)=3x-(x-1)-(x+7)(x+3)$

$C(x)=3x-x+1-(x+7)\times(x+3)$

$C(x)=3x-x+1-(x\times x+x\times3+7\times x+7\times3)$

$C(x)=3x-x+1-(x^2+3x+7x+21)$

$C(x)=3x-x+1-x^2-3x-7x-21$

$D(x)=(x+5)^2$

C'est une identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$D(x)=x^2+2\times x\times5+5^2$

$D(x)=x^2+10x+25$

$C(x) = -x^2 - 8x - 20$

$E(x) = (6+7x)(6-7x)$

C'est une identité remarquable (a+b)(a-b) = a² – b²

$E(x) = 6^2 - (7x)^2$

$E(x) = 36 - 49x^2$

$F(x) = (4x-1)^2$

C'est une identité remarquable (a-b)² = a² - 2ab + b²

$F(x) = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2$

$F(x) = 16x^2 - 8x \times 1 + 1$

Exercice 4 : Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = x^2 + 2x$
$A(x) = x \times x + x \times 2$
$A(x) = x(x + 2)$

$B(x) = 7x(x - 4) + (x - 4)^2$
$B(x) = 7x(x - 4) + (x - 4)(x - 4)$
$B(x) = (x - 4)(7x + (x - 4))$
$B(x) = (x - 4)(7x + x - 4)$
$B(x) = (x - 4)(8x - 4)$
$B(x) = 4(x - 4)(2x - 1)$

$C(x) = 9x^2 - 12x$
$C(x) = 3x \times 3x - 3x \times 4$
$C(x) = 3x(3x - 4)$

*$D(x) = (x + 1)(2x + 5) - (x + 1)(3x - 4)$
$D(x) = (x + 1)((2x + 5) - (3x - 4))$
$D(x) = (x + 1)(2x + 5 - 3x + 4)$
$D(x) = (x + 1)(-x + 9)$

$E(x) = 16x^2 - 1$
$E(x) = (4x)^2 - 1^2$
$E(x) = (4x - 1)(4x + 1)$

*$F(x) = 25 - (2x - 1)^2$
$F(x) = 5^2 - (2x - 1)^2$
$F(x) = (5 - (2x - 1))(5 + (2x - 1))$
$F(x) = (5 - 2x + 1)(5 + 2x - 1)$
$F(x) = (- 2x + 6)(2x + 4)$
$F(x) = 4(-x + 3)(x + 2)$

*$G(x) = (2 - x)(3x + 1) + (3x + 1)$
$G(x) = (2 - x)(3x + 1) + (3x + 1) \times 1$
$G(x) = (3x + 1)((2 - x) + 1)$
$G(x) = (3x + 1)(2 - x + 1)$
$G(x) = (3x + 1)(- x + 3)$

*__Exercice 5 :__

$A = 48 \times 99$
$A = 48 \times (100 - 1)$
$A = 48 \times 100 - 48 \times 1$
$A = 4\,800 - 48$
$A = 4\,752$

$B = 57 \times 101$
$B = 57 \times (100 + 1)$
$B = 57 \times 100 + 57 \times 1$
$B = 5\,700 + 57$
$B = 5\,757$

*$C = 101^2$
$C = (100 + 1)^2$
$C = 100^2 + 100 + 100 + 1$
$C = 10\,000 + 200 + 1$
$C = 10\,201$

CORRECTION

Puissances

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant.

x	10^7	10^{-5}	$\frac{1}{10^4}$	$10^{-15} \times 10^{11}$	$\frac{10^{16}}{10^9}$	$(10^2)^3$
Écriture décimale de x	10 000 000	0,000 01	0,000 1	0,000 1	10 000 000	1 000 000

Exercice 2 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

$A = 3\,789\,000 = 3{,}789 \times 10^6$

$B = 0{,}000\,000\,037 = 3{,}7 \times 10^{-8}$

Exercice 3 : Compléter ce tableau par l'écriture scientifique de chacune des distances données en km.

Planète	Saturne	Mars	Uranus	Terre
Distance moyenne du soleil	$14{,}3 \times 10^8$	228×10^6	2 880 000 000	$1{,}49 \times 10^8$
Distance moyenne du soleil en écriture scientifique	$1{,}43 \times 10 \times 10^8$ $= 1{,}43 \times 10^9$	$2{,}28 \times 10^2 \times 10^6$ $= 2{,}28 \times 10^8$	$2{,}88 \times 10^9$	Pas de changement $1{,}49 \times 10^8$

Planète	Neptune	Vénus	Jupiter	Mercure
Distance moyenne du soleil	$45\,000 \times 10^5$	11×10^7	778×10^6	$0{,}58 \times 10^8$
Distance moyenne du soleil en écriture scientifique	$4{,}5 \times 10^4 \times 10^5$ $= 4{,}5 \times 10^9$	$1{,}1 \times 10 \times 10^7$ $= 1{,}1 \times 10^8$	$7{,}78 \times 10^2 \times 10^6$ $= 7{,}78 \times 10^8$	$5{,}8 \times 10^{-1} \times 10^8$ $= 5{,}8 \times 10^7$

***Exercice 4 :** La masse d'un atome de carbone est égale à $1{,}99 \times 10^{-26}$ kg.

Les chimistes considèrent des paquets (appelés moles) contenant $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes.

a) Calculer la masse en grammes d'un tel paquet d'atomes de carbone.

b) Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

1 mole = $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes et pèse :
$6{,}022 \times 10^{23} \times 1{,}99 \times 10^{-26}$ kg $= 6{,}022 \times 1{,}99 \times 10^{23} \times 10^{-26}$ kg $= 11{,}98378 \times 10^{-3}$ kg

1 kg $= 10^3$ g donc 1 mole pèse :
$11{,}98378 \times 10^{-3} \times 10^3$ g $= 11{,}98378$ g ≈ 12 g

*__Exercice 5 :__ La vitesse de la lumière est d'environ 3×10^8 m/s. La distance Soleil-Pluton est de 5 900 Gm. Calculer le temps en heures mis par la lumière pour aller du Soleil à Pluton.

Rappel : 1Gm = 1 Giga mètre = 10^9 m

$$T = \frac{D}{V} = \frac{5\,900 \times 10^9 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = \frac{5900}{3} \times 10 \text{ s} \approx 19\,667 \text{ s} \approx 5{,}5 \text{ h}$$

Le temps mis par la lumière pour aller du Soleil à Pluton est d'environ 5 h 30 min.

Équations

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes.

E_1 : $3x - 1 = -13$
$3x = -12$
$x = -4$
La solution est $x = -4$

E_2 : $-2x + 5 = 8$
$-2x = 3$
$x = -1{,}5$
La solution est $x = -1{,}5$

E_3 : $5x = 0$
$x = 0 \div 5$
$x = 0$
La solution est $x = 0$

E_4 : $4 - x = 7$
$-x = 3$
$x = -3$
La solution est $x = -3$

E_5 : $11x - 3 = 2x + 9$
$9x - 3 = 9$
$9x = 12$
$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
La solution est $x = \frac{4}{3}$

E_6 : $\frac{x}{7} = \frac{-7}{4}$
$x = 7 \times (-7) \div 4$
$x = \frac{-49}{4} = -12{,}25$
La solution est $x = -12{,}25$

$E_7 = (-2x - 5)(3x + 2) = 0$
On sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
Donc : $-2x - 5 = 0$ **ou** $3x + 2 = 0$
$-2x = 5$ **ou** $3x = -2$
$x = -2{,}5$ **ou** $x = \frac{-2}{3}$

L'équation admet deux solutions : $-2{,}5$ et $\frac{-2}{3}$.

*Exercice 2 :** À un semi-marathon, les organisateurs décident de donner une somme d'argent aux trois premiers. Ils se mettent d'accord pour attribuer $\frac{3}{5}$ de la somme totale au vainqueur, $\frac{1}{3}$ au second et 200 € au troisième.
Quelle est la somme totale qu'ils décident de distribuer ?

Fraction de la somme totale obtenue par les deux premiers : $3/5 + 1/3 = 9/15 + 5/15 = 14/15$
Il reste 1/14 de la somme totale pour le troisième.
Comme 1/14 de cette somme représente 200 €, la somme totale est : $14\times200 = 2\ 800$ €.

Exercice 3 : On donne le programme de calcul suivant.

• Choisir un nombre • Ajouter 3 • Calculer le carré du résultat • Soustraire 9	**1.** Montrer que, si on choisit le nombre 4, le résultat obtenu est 40. **2.** Exprimer, en fonction du nombre x de départ, le résultat obtenu avec ce programme de calcul. En développant et en réduisant cette expression, montrer que le résultat du programme est $x^2 + 6x$. **3.** Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ? Justifier.

1. choix du nombre : 4
Ajouter 3 : $4 + 3 = 7$
Calculer le carré du résultat : $7^2 = 49$
Soustraire 9 : $49 - 9 = 40$
Si on choisit 4, le résultat obtenu est bien 40.

2. choix du nombre : x
Ajouter 3 : $x + 3$
Calculer le carré du résultat : $(x + 3)^2$
Soustraire 9 : $(x + 3)^2 - 9$
On développe : $x^2 + 3x + 3x + 9 - 9$
On réduit : $x^2 + 6x$

3. Pour répondre à cette question, on doit résoudre l'équation : $x^2 + 6x = 0$
On factorise : $x(x + 6) = 0$
On sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
Donc : $x = 0$ **ou** $x + 6 = 0$
$x = -6$
L'équation admet deux solutions : 0 et – 6.
Pour obtenir un résultat égal à 0, on peut choisir 0 ou – 6 comme nombre de départ.

Exercice 4 : On considère l'équation (E) : $(x + 3)(2x - 5) = 5x - 15$

1. Le nombre -1 est-il solution de (E) ?
2. Justifier que 2 est solution de (E).
3. *Prouver qu'il existe un autre nombre solution de (E).

1. Remplaçons x par -1 dans le membre de gauche :

$(x + 3)(2x - 5) = (-1 + 3)\times(2\times(-1) - 5) = 2\times(-2 - 5) = 2\times(-7) = -14$

Remplaçons x par -1 dans le membre de droite :

$5x - 15 = 5\times(-1) - 15 = -5 - 15 = -20$

Les deux membres de (E) ne sont pas égaux pour $x = -1$ donc -1 n'est pas solution de (E).

2. Remplaçons x par 2 dans le membre de gauche :

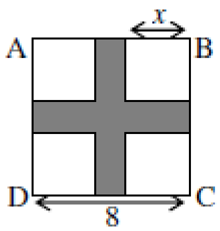
$(x + 3)(2x - 5) = (2 + 3)\times(2\times2 - 5) = 5\times(4 - 5) = 5\times(-1) = -5$

Remplaçons x par 2 dans le membre de droite :

$5x - 15 = 5\times2 - 15 = 10 - 15 = -5$

Les deux membres de (E) sont égaux pour $x = 2$ donc 2 est solution de (E).

Exercice 5 : L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire le cm².



On considère un carré ABCD de côté 8.

On enlève, comme indiqué sur la figure, quatre petits carrés superposables de côté x ($0 < x < 4$). On obtient ainsi une croix coloriée en gris. On appelle $A(x)$ son aire.

	A	B
1	x	f(x) = 64-4x²
2	0	
3	0,5	
4	1	
5	1,5	
6	2	
7	2,5	
8	3	
9	3,5	
10	4	

1. Montrer que $A(x) = 64 - 4x^2$.
2. Voici une copie de la feuille de calcul réalisée sur tableur. Quelle formule doit-on saisir en B2 ?
3. En étirant la formule vers le bas, pour quelle valeur de x l'aire de la croix grise vaut 15 cm² ?

1. $A(x)$ = Aire (grand carré) – 4 × Aire (carré blanc) = $8^2 - 4\times x^2 = 64 - 4x^2$

2. Formule à saisir en B2 : "=64–4*A2^2" ou "=64–4*A2*A2"

3. Lorsqu'on étire la formule vers le bas, on s'aperçoit que c'est pour $x = 3{,}5$ que l'aire grise est égale à 15 cm².

CORRECTION

Fonctions Généralités

Exercice 1 On sait que $f(2) = 5$.

1.	L'image de 5 par la fonction f est 2.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire
2.	L'image de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	~~FAUX~~	~~On ne peut rien dire~~
3.	Un antécédent de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	~~FAUX~~	~~On ne peut rien dire~~
4.	Un antécédent de 2 par la fonction f est 5.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire
5.	Un nombre dont l'image est 5 par la fonction f est 2.	VRAI	~~FAUX~~	~~On ne peut rien dire~~
6.	2 a pour image 5 par la fonction f.	VRAI	~~FAUX~~	~~On ne peut rien dire~~
7.	Un nombre dont l'image est 7 par la fonction f est 2.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire
8.	5 a pour antécédent 2 par la fonction f.	VRAI	~~FAUX~~	~~On ne peut rien dire~~
9.	2 a pour antécédent 5 par la fonction f.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire
10.	2 a pour image 7 par la fonction f.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire
11.	5 a pour image 2 par la fonction f.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire
12.	Le point de coordonnées (2 ; 5) appartient à $\mathscr{C}$.	VRAI	~~FAUX~~	~~On ne peut rien dire~~
13.	Le point de coordonnées (5 ; 2) appartient à $\mathscr{C}$.	~~VRAI~~	~~FAUX~~	On ne peut rien dire

Exercice 2 : Sur le graphique ci-contre la courbe C_1 représente une fonction f et la courbe C_2 représente une fonction g.

1. L'image de 2 est – 2 par la fonction g.
2. Les antécédents de 4 par la fonction g sont approximativement – 0,8 et + 0,8.
3. On a $f(x) = g(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$. À ce moment-là : $f(x) = g(x) = 3$

Exercice 3

1. $f(-3) = 2\times(-3) - 4 = -6 - 4 = -10$. L'image de -3 par la fonction f est -10.
2. $f(x) = 24$ s'écrit aussi $2x - 4 = 24$. En résolvant cette équation, on trouve $x = 14$. On en déduit que l'antécédent de 24 par la fonction f est 14.
3. $g(3) = 4\times3^2 = 4\times9 = 36$. L'image de 3 par la fonction g est 36.
4. $g(x) = 8$ s'écrit aussi $4x^2 = 8$ d'où $x^2 = 2$ et donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. On en déduit que les antécédents de 8 par la fonction g sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Exercice 4

Résolution graphique

1. L'image de 1 par f est – 3. L'image de – 2 par f est 6.
2. 0 et 2 sont les antécédents de – 2 par f.
3. – 3 n'admet qu'un seul antécédent : 1. En effet, il n'y a qu'un seul point d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $f(x) = -3$.

*Résolution par le calcul

1. $f(0) = (0-1)^2 - 3 = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$. L'image de 0 par f est – 2.

2. a) Rechercher les antécédents de 13 par f revient à trouver x tel que : $f(x) = 13$ donc : $(x-1)^2 - 3 = 13$ ce qui revient bien à résoudre l'équation $(x-1)^2 - 16 = 0$.

b) $(x-1)^2 - 16 = (x-1)^2 - 4^2 = (x-1-4)(x-1+4) = (x-5)(x+3)$

c) Pour trouver les antécédents de 13 par f il faut donc finalement résoudre : $(x-5)(x+3) = 0$

Or on sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc $x - 5 = 0$ **ou** $x + 3 = 0$

$x = 5$ **ou** $x = -3$

L'équation admet donc deux solutions : 5 et – 3.

Les antécédents de 13 par f sont 5 et – 3.

Exercice 5

Égalité	Description : image ou antécédent	Point appartenant à $\mathscr{C}$
$f(-2) = -1$	– 1 est l'image de – 2 par f	$(-2 ; -1) \in \mathscr{C}$
$f(5) = 7$	7 est l'image de 5 par f	$(5 ; 7) \in \mathscr{C}$
$f(4) = -10$	4 est un antécédent de – 10 par f	$(4 ; -10) \in \mathscr{C}$
$f(-3) = 2$	– 3 est un antécédent de 2 par f	$(-3 ; 2) \in \mathscr{C}$

Fonctions affines

Exercice 1 : Parmi ces fonctions, détermine

$f : x \to 4x - 3$ $\qquad g : x \to 5 - 2x$ $\qquad h : x \to 3x^2 + 5$

$i : x \to 4{,}5x$ $\qquad j : x \to -4$ $\qquad k : x \to \dfrac{1}{x}$

a) Celles qui sont affines ; b) Celles qui sont linéaires ; c) Celles qui sont constantes ; d) Celles qui ne sont pas affines.

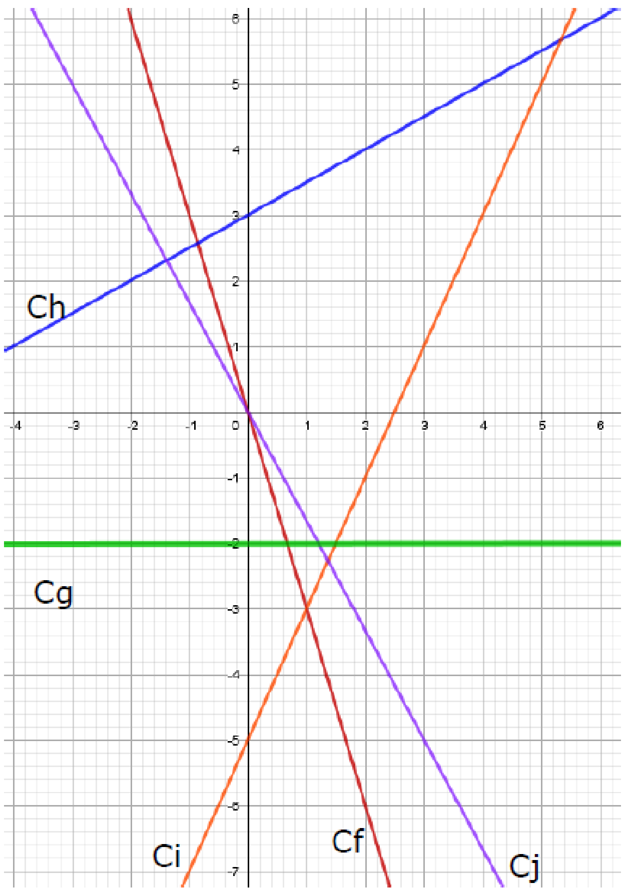
a) Fonction affines : f et g
b) Fonctions linéaires : i
c) Fonctions constantes : j
d) Fonctions non affines : h et k

Exercice 2

a) La fonction f est linéaire. Sa représentation graphique est donc une droite qui passe par l'origine du repère (0 ; 0). Il nous faut les coordonnées d'un deuxième point.
En choisissant $x = 2$ on calcule $f(2) = -3 \times 2 = -6$
Le point de coordonnées (2 ; – 6) appartient aussi à la courbe représentative de f.

b) La fonction g est constante. Sa représentation graphique est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par (0 ; – 2).

c) La fonction h est affine. Sa représentation graphique est donc une droite. Il nous faut les coordonnées de deux points qui sont sur cette droite.
• Choisissons : $x = 2$ on calcule $h(2) = 1/2 \times 2 + 3 = 1 + 3 = 4$.
Le point de coordonnées (2 ; 4) appartient à la courbe représentative de h.
• Choisissons ensuite $x = -4$ on calcule $h(-4) = 1/2 \times (-4) + 3 = -2 + 3 = 1$.
Le point de coordonnées (– 4 ; 1) appartient à la courbe représentative de h.



d) La fonction i est affine. Sa représentation graphique est donc une droite. Il nous faut les coordonnées de deux points qui sont sur cette droite.
• Choisissons : $x = 1$ on calcule $i(1) = 2 \times 1 - 5 = 2 - 5 = -3$.
Le point de coordonnées (1 ; – 3) appartient à la courbe représentative de i.
• Choisissons ensuite $x = 3$ on calcule $i(3) = 2 \times 3 - 5 = 6 - 5 = 1$.
Le point de coordonnées (3 ; 1) appartient à la courbe représentative de i.

Exercice 3

• La droite (d_1) passe par l'origine du repère, elle représente donc une fonction linéaire de la forme $f(x) = ax$ où a est le coefficient directeur de la droite (pente). D'après le chemin entre les deux points qui ont été placés sur (d_1), on calcule $a = 1/2$

Donc (d_1) représente la fonction $f(x) = 1/2x$

• La droite (d_2) ne passe pas par l'origine du repère, elle représente donc une fonction affine de la forme $g(x) = ax + b$ où a est le coefficient directeur de la droite (pente) et b l'ordonnée à l'origine. D'après le chemin entre les deux points qui ont été placés sur (d_2), on calcule $a = 2/{-2} = -1$. De plus l'intersection de (d_2) avec l'axe des ordonnées donne $b = 5$.

Donc (d_2) représente la fonction $g(x) = -x + 5$

• La droite (d_3) ne passe pas non plus par l'origine du repère, elle représente donc une fonction affine de la forme $h(x) = ax + b$ où a est le coefficient directeur de la droite (pente) et b l'ordonnée à l'origine. D'après le chemin entre les deux points qui ont été placés sur (d_3), on calcule $a = 4/2 = 2$. De plus l'intersection de (d_3) avec l'axe des ordonnées donne $b = 1$.

Donc (d_3) représente la fonction $h(x) = 2x + 1$.

Exercice 4

a) Hausse de 2 % : $x \mapsto 1{,}02x$ (en effet : 100 % + 2 % = 1 + 0,02 = 1,02)

b) Baisse de 40 % : $x \mapsto 0{,}6x$ (en effet : 100 % – 40 % = 1 – 0,4 = 0,6)

c) Prendre 65 % : $x \mapsto 0{,}65x$ (en effet : 65 % = 0,65)

*__Exercice 5__

En baissant une quantité x de 2 %, on la multiplie par 0,98. Elle devient donc $0{,}98x$.

On baisse cette quantité $0{,}98x$ de nouveau de 2 %, on la remultiplie donc par 0,98 ce qui donne $0{,}98 \times 0{,}98x = 0{,}9604x$

$0{,}9604x$ revient à prendre 96,04 % de x. La quantité x a donc baissé de 3,96 % et non de 4 %.

*__Exercice 6__

On ne connaît pas le prix d'origine de cet article : on le note x.

On sait qu'une remise de 20 % de x donne une valeur après réduction de $0{,}8x$.

Donc : $0{,}8x = 58{,}40$ € donc $x = 58{,}40 \div 0{,}8 = 73$ €

Le prix d'origine était de 73 €.

Statistiques

Exercice 1

a)14 ; 26 ; 11 ; 33 ; 41 ; 13
On range les valeurs dans l'ordre croissant.
11 ; 13 ; 14 ; 26 ; 33 ; 41
Il y a 6 valeurs, donc la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales.

$\dfrac{14+26}{2} = 20$

La médiane de cette série est 20.

Calcul de l'étendue :
41 – 11 = 30
L'étendue de cette série est 30.

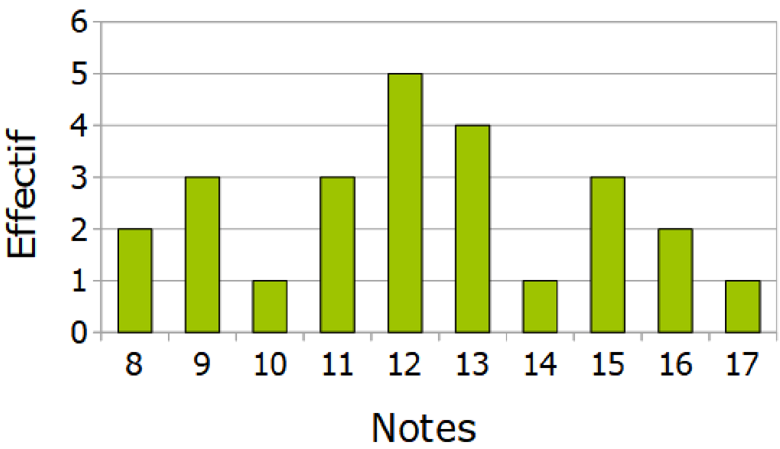
b) 37,2 ; 39,4 ; 38 ; 38,2 ; 39 ; 38,6
On range les valeurs dans l'ordre croissant.
37,2 ; 38 ; 38,2 ; 38,6 ; 39 ; 39,4
Il y a 6 valeurs, donc la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales.

$\dfrac{38{,}2+38{,}6}{2} = 38{,}4$

La médiane de cette série est 38,4.

Calcul de l'étendue :
39,4 – 37,2 = 2,2
L'étendue de cette série est 2,2.

Exercice 2 : Voici les notes obtenues par une classe de 3^{e} à un devoir.



1. Déterminer la moyenne et la médiane des notes et interpréter ces résultats.

2. Calculer l'étendue et interpréter le résultat.

1. Total des points obtenus par les élèves de la classe : 8×2 + 9×3 + … + 16×2 + 17 =306
Nombre d'élèves de cette classe : 2 + 3 + 1 + … + 2 + 1 = 25
Moyenne de points obtenus par élève dans cette classe : 306 ÷ 25 = 12,24.
Cela signifie que si les élèves avaient tous eu la même note à ce devoir, ils auraient eu 12,24/20.

Comme il y a 25 élèves, la médiane est la 13^{e} note des élèves (celles-ci étant rangées dans l'ordre croissant).

- 2 notes ⩽ 8
- 2+3 = 5 notes ⩽ 9
- 5 + 1 = 6 notes ⩽ 10
- 6 + 3 = 9 notes ⩽ 11
- 9 + 5 = 14 notes ⩽ 12 : La 13^{e} note est donc égale à 12.

La médiane des notes est 12.
Cela signifie qu'il y a autant d'élèves qui ont eu une note inférieure ou égale à 12 que d'élèves qui ont eu un note supérieure ou égale à 12.

2. Calcul de l'étendue : 17 – 8 = 9
Cela signifie qu'il y a 9 points d'écart entre la meilleure et la moins bonne note.

Exercice 3 : Un fabriquant a relevé le nombre de biscuits brisés dans un paquet.

Nombre de biscuits brisés	2	4	6	9	13
Effectif	5	8	7	2	1

En moyenne, combien y a-t-il de biscuits brisés par paquet ?

Nombre total de biscuits brisés : $5\times2 + 8\times4 + 7\times6 + 9\times2 + 13\times1 = 115$
Nombre total de paquets : $5 + 8 + 7 + 2 + 1 = 23$
Moyenne de biscuits brisés par paquet : $115 \div 23 = 5$

Exercice 4 : Voici le relevé de longueurs des gousses de vanille d'un cultivateur.

Longueur (en cm)	12	15	17	22	23
Effectif	600	800	1 800	1 200	600

1. Quel est l'effectif total de cette production ?
2. Le cultivateur peut seulement les conditionner dans des tubes de 20 cm de long. Quel pourcentage de cette production a-t-il pu conditionner sans plier les gousses ?

*La chambre d'agriculture décerne un label de qualité aux agriculteurs si :
- la longueur moyenne des gousses est supérieure ou égale à 16,5 cm ;
- et la médiane de leur production est supérieure à 17,5 cm.

3. Ce cultivateur pourra-t-il recevoir ce label de qualité ?

1. Effectif total = 600 + 800 + 1 800 + 1 200 + 600 = 5 000
2. Nombre de gousses dont la longueur est inférieure à 20 cm : 600 + 800 + 1 800 = 3 200
Pourcentage de gousses mis en tubes : $3200 \div 5000 = 0,64$ ce qui représente 64 % de la production.
3. Longueur totale de toutes les gousses : $600\times12 + 800\times15 + \ldots + 600\times23 = 90\ 000$
Longueur moyenne d'une gousse : $90\ 000 \div 5\ 000 = 18$ cm (elle est bien supérieure ou égale à 16,5 cm).

Comme il y a en tout 5 000 gousses, la longueur médiane de la production est la moyenne des longueurs de la 2 500^{e} et de la 2 501^{e} gousse.

Longueur (en cm)	12	15	17	22	23
Effectif	600	800	1 800	1 200	600
E.C.C.	600	1400	3200	4400	5000

D'après la ligne des effectifs cumulés croissant, ces deux longueurs sont de 15 cm. Cela veut dire que la médiane de la production est de 17 cm (qui est don inférieure à 17,5 cm).
Cela signifie que ce cultivateur ne pourra pas recevoir le label de qualité.

CORRECTION

Probabilités

Exercice 1

1. Pierre a 1 possibilité sur les 3 verres de trouver la pièce. La probabilité de trouver la pièce est $\frac{1}{3}$
2. Pierre a 2 possibilités sur 5 verres de trouver la pièce. La probabilité de trouver la pièce est $\frac{2}{5} = 0,4 > \frac{1}{3}$. Dans le cas 2, il a donc plus de chance de trouver une pièce.

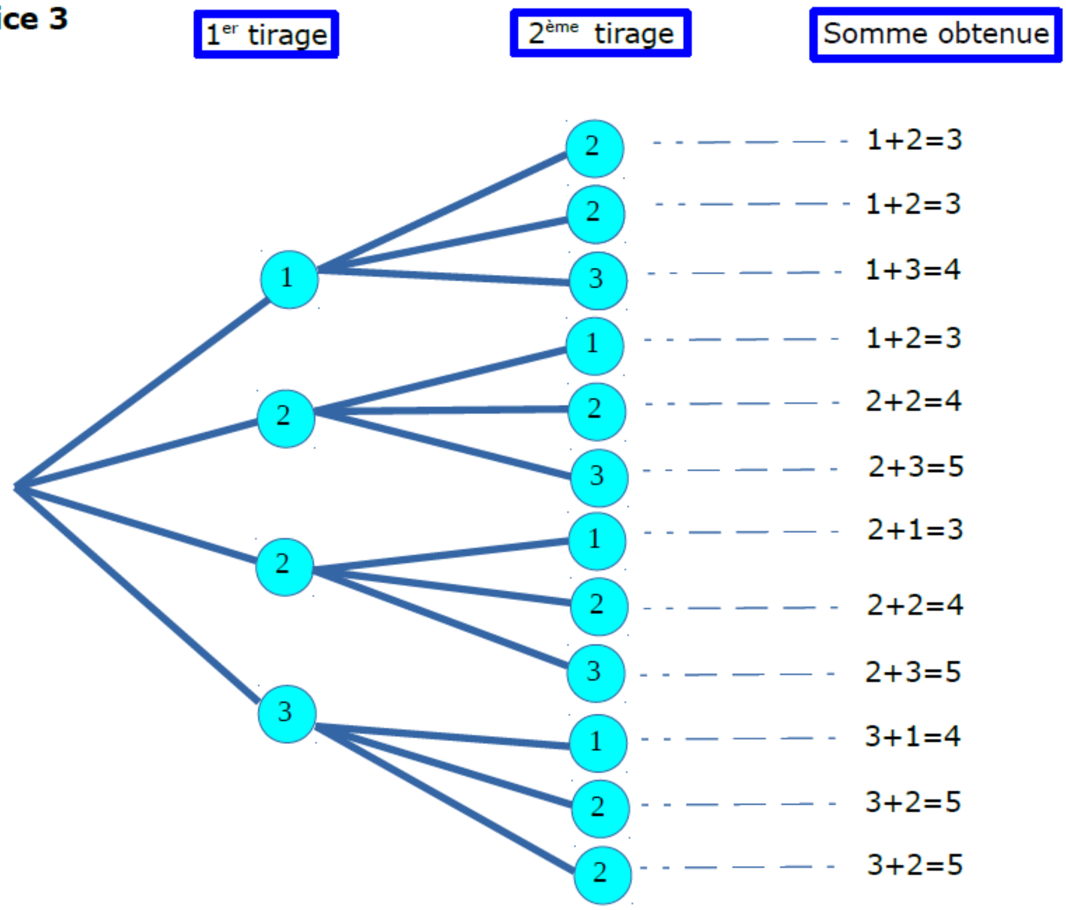
Exercice 2

La somme des probabilités de toutes les issues étant égale à 1, on a donc :

$p(A) + p(B) + p(C) + p(D) = 1$

$p(C)=1-\left(p(A)+p(B)+p(D)\right)=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{3}{15}+\frac{2}{15}+\frac{5}{15}\right)=1-\frac{10}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

Exercice 3



En observant l'arbre, il y a 4 cas favorables sur les 12 cas possibles donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 est égales à $\frac{4}{12}$ soit $\frac{1}{3}$.

Exercice 4

1.

Souris	Mâle	Femelle	Total
Blanche	30	75	105
Grise	7	8	15
Total	37	83	120

2. a) Il y a 105 souris blanches sur un total de 120 donc P(a) = $\frac{105}{120}$

b) Il y a 83 souris blanches sur un total de 120 donc P(b) = $\frac{83}{120}$

c) Il y a 7 souris mâle grise sur un total de 120 donc P(b) = $\frac{7}{120}$

3. Il y a 75 souris femelles blanches sur un total de 105 souris blanches donc la probabilité d'obtenir une femelle en sachant que la souris est blanche est $\frac{75}{105}$ soit $\frac{5}{7}$

*__Exercice 5__

1. 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55 donc on dispose de 55 morceaux de papiers.

2. 2+4+6+8+10 = 32 donc il y a 32 morceaux de papiers affichant un nombre pair.

P("le nombre obtenu est pair") = $\frac{32}{55}$

Arithmétique

Exercice 1 :

• pour 32, on teste tous les diviseurs jusqu'à $\sqrt{32} \approx 5{,}6$ donc on teste la divisibilité jusqu'à 5 :
$32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$ donc les diviseurs de 32 sont : 1 - 2 - 4 - 8 - 16 et 32

• pour 67, on teste tous les diviseurs jusqu'à $\sqrt{67} \approx 8$. Or il n'a que 1 et 67 comme diviseurs (Remarque : 67 est un nombre premier)

• pour 81, on teste tous les diviseurs jusqu'à $\sqrt{81} = 9$ donc on teste la divisibilité jusqu'à 9 :
$81 = 1 \times 81 = 3 \times 27 = 9 \times 9$ donc les diviseurs de 32 sont : 1-3-9-27 et 81

• pour 144, on teste tous les diviseurs jusqu'à $\sqrt{144} = 12$ donc on teste la divisibilité jusqu'à 12 : $144 = 1 \times 144 = 2 \times 72 = 3 \times 48 = 4 \times 36 = 6 \times 24 = 8 \times 18 = 9 \times 16 = 12 \times 12$ donc les diviseurs de 144 sont : 1 - 2 - 3 - 4 - 6 - 8 - 9 - 12 - 16 - 18 - 24 - 36 - 48 - 72 et 144

***Exercice 2 :**

- $a = 10k = 2\times5k$ donc a est un multiple de 2
- $b = 6k = 3\times2k$ donc b est un multiple de 3
- $a + b = 10k + 6k = 16k = 8\times2k$ donc 8 est un diviseur de $a + b$
- $ab = 10k \times 6k = 60k^2$

  Si on prend par exemple $k=1$: $ab= 60$ et 8 ne divise pas 60

  donc, pour toutes les valeurs de k, 8 n'est pas un diviseur de ab.

Exercice 3 :

les multiples de 7 entre 100 et 150 sont : 105 - 112 - 119 - 126 - 133 - 140 - 147

***Exercice 4 :**

Sur les deux entiers consécutifs, obligatoirement, un des deux nombres est pair donc le produit des nombres sera également pair.

Exercice 5 :

32	59	115	187	841
227	303	503	667	883

Pour déterminer si 59 est un nombre premier, il suffit de savoir s'il est divisible par l'un des nombres premiers compris entre 2 et $\sqrt{59} \approx 7{,}7\ldots$
Or 59 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7. On conclut que 59 n'admet que 2 diviseurs qui sont 1 et 59. Il est donc premier.
On procède de la même manière pour 227 et 503.

$32 = 2^5$ $115 = 5\times23$ $187 = 11\times17$ $841 = 29^2$ $303 = 3\times101$ $667 = 23\times29$

Exercice 6 :

1. 1080 et 288 étant des nombres pairs, la fraction $\frac{1080}{288}$ peut être simplifiée par 2.

On peut décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$\frac{1080}{288} = \frac{2\times2\times2\times3\times3\times3\times5}{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3} = \frac{15}{4}$$

*__2.__ En utilisant les critères de divisibilités, 12789 et 5481 sont divisibles par 9.
$(1+2+7+8+9 = 27 = 9\times3$ et $5+4+8+1 = 18 = 2\times9)$

Pour simplifier $\frac{12789}{5481}$, cherchons le PGCD de 12789 et de 5481 :

On le trouve en considérant les diviseurs communs aux deux décompositions

$12789 = 3\times3\times7\times7\times29$

$5481 = 3\times3\times3\times7\times29$

Donc $PGCD(12789 ;5481)=3\times3\times7\times29=1827$

$$\frac{12789}{5481} = \frac{7\times1827}{3\times1827} = \frac{7}{3}$$

Exercice 7 :

1. a) PGCD(45 ; 63)

$45 = 3\times3\times5$

$63 = 3\times3\times7$

$PGCD(63 ;45)=3\times3$

$PGCD(63 ;45)=9$

b) PGCD(48 ; 180)

$48 = 4\times3\times4$

$180 = 4\times3\times3\times5$

$PGCD(48;180)=3\times4$

$PGCD(48;180)=12$

c) PGCD(840 ; 532)

$$\begin{array}{r|l}
840 & 2 \\
420 & 2 \\
210 & 2 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
532 & 2 \\
266 & 2 \\
133 & 7 \\
19 & 19 \\
1 &
\end{array}$$

$PGCD(840;532)=2\times2\times7$

$PGCD(840;532)=28$

2. a) PPCM(6 ; 9) **b)** PPCM(54 ; 45) **c)** PPCM(90 ; 125)

a) Les premiers multiples (non nul) de 6 sont : 6-12-18-24-30-36...
Les premiers multiples (non nul) de 9 sont : 9-18-27-36...
donc PPCM(6 ; 9)=36

b) PPCM(54 ; 45)
Les premiers multiples (non nul) de 54 sont : 54-108-162-216-270...
Les premiers multiples (non nul) de 45 sont : 45-90-135-180-225-270...
donc PPCM(54 ; 45)=270

c) PPCM(90 ; 125)
Les premiers multiples (non nul) de 90 sont : 90-180-270-360-450-...
Les premiers multiples (non nul) de 125 sont : 125-250-375-500-...

Trop long...

donc :

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

PPCM(90 ; 125)$=5\times2\times3\times3\times5\times5=2250$

Exercice 8 :
1. Sachant qu'il ne reste aucune fleur, le nombre de bouquets est donc un diviseur commun à 24 et 30.
De plus, comme il faut le maximum de bouquets possibles, il faut donc trouver le PGCD de 30 et 24.

2. Décomposons 30 et 24 en produit de facteurs premiers.
$30 = 2\times3\times5$
$24 = 2\times2\times2\times3$
donc PGCD $(30;24) = 2\times3 = 6$
Le fleuriste pourra faire au maximum 6 bouquets contenant 5 tulipes et 4 muscaris.

***Exercice 9 :**
1. Chaque joueur devant recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs, le nombre de joueurs est alors un diviseur de 180 et 120.

20 divise 180 et 120 donc il peut y avoir 20 joueurs
9 divise 180 mais non 120 donc il ne peut y avoir 9 joueurs.

2. Il faut chercher tous les diviseurs communs à 180 et 120 :
Recherchons la décomposition en diviseurs premiers puis le PGCD(180;120)

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

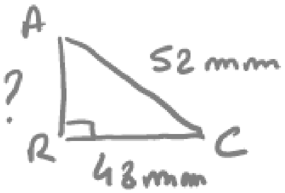
PGCD(180;120)= *$2\times2\times3\times5 = 60$*
Tous les diviseurs de 60 sont :
1-2-3-4-5-6-10-12-15-20-30-60
On peut donc former des équipes de :
2-3-4-5-6-10-12-15-20-30 ou 60 joueurs.

Exercice 10 :
Il faut dans ce cas de figure trouver le plus petit multiple commun de 12 et 15 :
Les premiers multiples de 12 sont : 12-24-36-48-60...
Les premiers multiples de 15 sont : 15-30-45-60...

Donc dans 60h, la montre et le réveil sonneront en même temps.
60 = 48 + 12 donc pour être plus précis , ils sonneront en même temps le 24 septembre à 6h30 du matin.

Égalité de Pythagore

Exercice 1 :



Le triangle ARC est rectangle en R.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AR^2 + RC^2$$
$$52^2 = AR^2 + 48^2$$
$$2704 = AR^2 + 2304$$
$$AR^2 = 2704 - 2304$$
$$AR^2 = 400$$
$$AR = \sqrt{400}$$
$$AR = 20$$

Donc AR mesure 20 mm.

Exercice 2 :

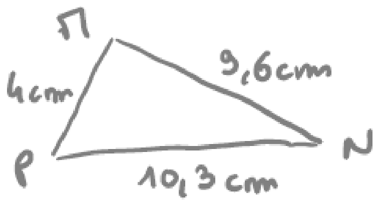
Le triangle PIE est rectangle en I.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PE^2 = PI^2 + IE^2$$
$$PE^2 = 7^2 + 4^2$$
$$PE^2 = 49 + 16$$
$$PE^2 = 65$$
$$PE = \sqrt{65}$$

Donc PE mesure exactement $\sqrt{65}$ cm.

Exercice 3 :



Le côté le plus long est PN.

D'une part :

$PN^2 = 10{,}3^2 = 106{,}09$

D'autre part :

$$\begin{aligned} MP^2 + MN^2 &= 4^2 + 9{,}6^2 \\ &= 16 + 92{,}16 \\ &= 108{,}16 \end{aligned}$$

On constate que $PN^2 \neq MP^2 + MN^2$.

Donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle MNP n'est pas rectangle.

Exercice 4 :

1. On se place dans le triangle AMS qui est rectangle en M.
   D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
&AS^2 = AM^2 + MS^2\\
&6^2 = AM^2 + 4{,}8^2\\
&36 = AM^2 + 23{,}04\\
&AM^2 = 36 - 23{,}04\\
&AM^2 = 12{,}96\\
&AM = \sqrt{12{,}96}\\
&AM = 3{,}6
\end{aligned}$$

   Donc AM mesure 3,6 cm.

2. Le côté le plus long est AR.
   D'une part :

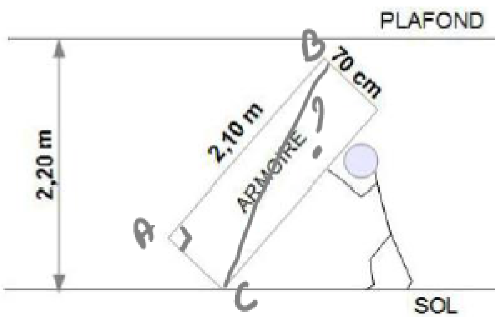
$$AR^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$$

   D'autre part :

$$\begin{aligned}
AS^2 + SR^2 &= 6^2 + 2{,}5^2\\
&= 36 + 6{,}25\\
&= 42{,}25
\end{aligned}$$

   On constate que $AR^2 = AS^2 + SR^2$.
   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ARS est rectangle en S.

Exercice 5 :



⚠ Les longueurs doivent être misent dans la même unité.

L'armoire est rectangulaire donc ABC est un triangle rectangle en A. Cherchons la longueur BC.

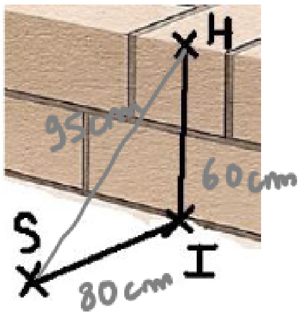
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
&BC^2 = AC^2 + AB^2\\
&BC^2 = 0{,}70^2 + 2{,}10^2\\
&BC^2 = 0{,}49 + 4{,}41\\
&BC^2 = 4{,}9\\
&BC = \sqrt{4{,}9}\\
&BC \approx 2{,}21
\end{aligned}$$

BC mesure environ 2,21 m et la hauteur sous plafond est de 2,20 m.

Or, 2,21 > 2,20 donc Fabien ne pourra pas relever son armoire.

Exercice 6 :



Le côté le plus long est SH.

D'une part :

$$SH^2 = 95^2 = 9025$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} SI^2 + IH^2 &= 80^2 + 60^2 \\ &= 6400 + 3600 \\ &= 10000 \end{aligned}$$

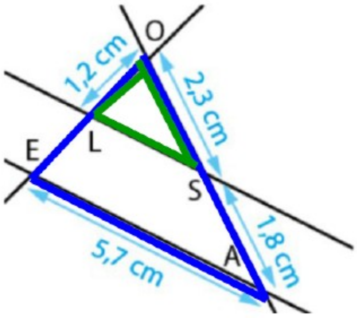
On constate que $SH^2 \neq SI^2 + IH^2$.

Donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle SHI n'est pas rectangle.

Le mur de Ben n'est donc pas droit.

Égalité de Thalès

Exercice 1 :



On a :

- les points O, L et E sont distincts et alignés ainsi que les points O, S et A
- (LS) // (EA)

On applique le théorème de Thalès

Deux méthodes possibles !

On obtient :

$$\frac{OE}{OL}=\frac{OA}{OS}=\frac{EA}{LS}$$

$$\frac{OE}{1,2}=\frac{4,1}{2,3}=\frac{5,7}{LS}$$

Longueurs du triangle OEA	OE ?	OA 4,1	EA 5,7
Longueurs du triangle OLS	OL 1,2	OS 2,3	LS ?

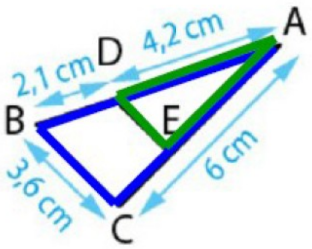
Est un tableau de proportionnalité

On peut donc appliquer l'égalité du produit en croix

donc : $OE=\frac{1,2\times 4,1}{2,3}\approx 2,14\,cm$ $\quad LS=\frac{2,3\times 5,7}{4,1}\approx 3,2\,cm$

donc $EL=OE-OL\approx 2,1-1,2\approx 0,9\,cm$

Exercice 2 :



On a :

- les points A, D et B sont distincts et alignés ainsi que les points A, E et C
- (DE) // (BC)

On applique le théorème de Thalès

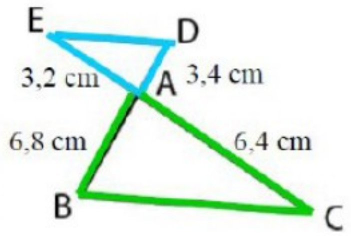
On obtient : $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

AB = AD + DB = 4,2 + 2,1 = 6,3 cm

$$\frac{4,2}{6,3}=\frac{AE}{6}=\frac{DE}{3,6}$$

donc : $BC=\frac{4,2\times 6}{6,3}=4\,cm$ $\quad DE=\frac{4,2\times 3,6}{6,3}=2,4\,cm$

Exercice 3 :



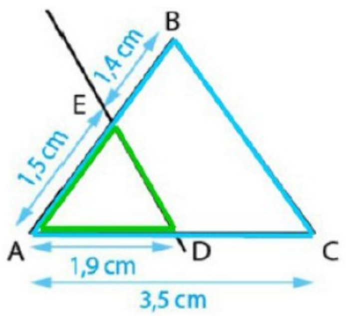
On a : les points E, A et C distints et **alignés dans le même ordre** que les points D, A et C

D'une part : $\frac{EA}{AC}=\frac{3,2}{6,4}=\frac{1}{2}=0,5$ D'autre part : $\frac{DA}{AB}=\frac{3,4}{6,8}=\frac{1}{2}=0,5$

On constate : $\frac{EA}{AC}=\frac{DA}{AB}$

On peut appliquer la **réciproque du théorème de Thalès** : (BC) // (DE)

Exercice 4 :



On a : les points A, E et B distints et **alignés dans le même ordre** que les points A, D et C.

D'une part : $\frac{AB}{AE}=\frac{2,9}{1,5}=\frac{29}{15}\approx 1,93$ D'autre part : $\frac{AC}{AD}=\frac{3,5}{1,9}=\frac{35}{19}\approx 1,84$

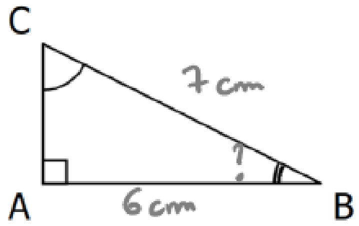
On constate : $\frac{AB}{AE}\neq\frac{AC}{AD}$

On **ne peut pas** appliquer la **réciproque du théorème de Thalès** (on applique **la contraposée du théorème de Thalès**)
donc les droites (ED) et (BC) ne sont pas parallèles.

Trigonométrie

Exercice 1 :

ABC est un triangle rectangle en A.



$$\cos\widehat{ABC} = \frac{Coté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}}{Hypoténuse}$$

$$cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$cos\widehat{ABC} = \frac{6}{7}$$

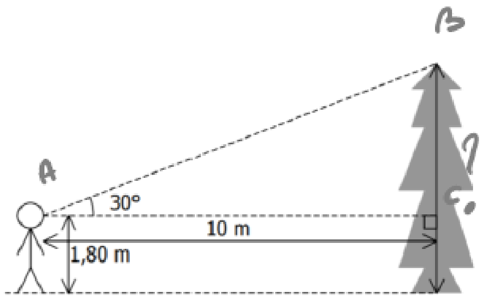
$$\widehat{ABC} = Arccos\left(\frac{6}{7}\right)$$

$$\widehat{ABC} \approx 31°$$

La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est d'environ 31°.

Exercice 2 :

ABC est un triangle rectangle en C.



☑ Calcul de la longueur $[AB]$:

$$cos\widehat{BAC} = \frac{Côté\ adjacent\ à\ \widehat{BAC}}{Hypoténuse}$$

$$cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos 30 = \frac{10}{AB}$$

$$AB = \frac{10}{\cos 30}$$

$$AB \approx 11{,}5\ m$$

☑ Calcul de l'angle $\widehat{ABC}$:

Dans un triangle, la somme des angles d'un triangle est de 180°.

$$\widehat{ABC} = 180 - (30 + 90) = 60°$$

☑ Calcul de la longueur $[BC]$:

$$cos\widehat{ABC} = \frac{Côté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}}{Hypothènuse}$$

$$cos\widehat{ABC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos 60 = \frac{BC}{11{,}5}$$

$$BC = 11{,}5 \times \cos 60$$

$$BC \approx 5{,}75\ m$$

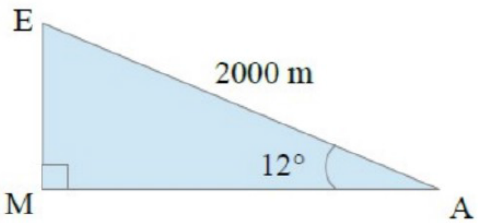
☑ Calcul de la longueur de l'arbre :

$$BC + 1{,}80 = 5{,}75 + 1{,}80 = 7{,}55$$

L'arbre mesure donc environ 7,6 m

Exercice 2 :

On peut schématiser la situation par le triangle **EMA rectangle en M**



On cherche la longueur EM pour connaître ensuite l'altitude à l'arrivée.

Dans le triangle EMA rectangle en M :

$$\sin(\widehat{EAM}) = \frac{Opposé}{Hypoténuse}$$

$$\sin(\widehat{EAM}) = \frac{EM}{EA}$$

$$\sin(12°) = \frac{EM}{2000\,m}$$

$$EM = 2000\,m \times \sin(12°)$$

$$EM \simeq 416\,m \quad (arrondi\ au\ mètre\ près)$$

cela s'appelle le ***dénivelé***

Donc, il y a environ 416 m d'altitude de différence entre l'altitude de départ et celle d'arrivée.

1 800 – 416 = 1 384 m

L'arrivée est donc a une altitude d'environ 1 384 m.

CORRECTION

Solides et volumes

Exercice 1 :

1. Calculons le volume d'un pot de confiture rempli jusqu'à 1 cm du bord :

$$\mathcal{V}_{pot\ cylindrique} = \mathcal{A}_{base} \times hauteur$$
$$\mathcal{V}_{pot\ cylindrique} = \pi R^2 \times 12$$
$$\mathcal{V}_{pot\ cylindrique} = \pi \times 3^2 \times 12$$
$$\mathcal{V}_{pot\ cylindrique} = 108\pi$$
$$\mathcal{V}_{pot\ cylindrique} \approx 339{,}3$$

Un pot cylindrique rempli jusqu'à 1 cm du bord a une contenance d'environ 339,3 cm^3.

Léo doit remplir ses pots de 2,7 litres de confiture.
Il faut convertir 339,3 cm^3 en litres.
On sait que $1l = 1dm^3$.

⚠ $1l = 1dm^3$ est à connaitre par cœur !

$$339{,}3\ cm^3 = 0{,}3393\ dm^3 = 0{,}3393\ l$$

$$\frac{2{,}7}{0{,}3393} \approx 7{,}96$$

Il faudra donc à Léo 8 pots de confitures pour stocker ses 2,7 litres de confiture.

2. Il faut calculer le périmètre du disque :

$$\mathcal{P}_{disque} = 2\pi R$$
$$\mathcal{P}_{disque} = 2\pi \times 3$$
$$\mathcal{P}_{disque} = 6\pi$$
$$\mathcal{P}_{disque} \approx 18{,}8$$

La surface latérale du pot est d'environ 18,8 cm.
La longueur de l'étiquette est donc bien d'environ 18,8 cm.

Exercice 2 :

$$\mathcal{V}_{tente} = \mathcal{A}_{base} \times hauteur$$
$$\mathcal{V}_{tente} = \mathcal{A}_{triangle} \times hauteur$$
$$\mathcal{V}_{tente} = \frac{1{,}732 \times 1{,}5}{2} \times 2{,}2$$
$$\mathcal{V}_{tente} = 1{,}299 \times 2{,}2$$
$$\mathcal{V}_{tente} = 2{,}8578$$

Le volume de la tente est de 2,8578 m^3, ce qui est inférieure aux 3 m^3 désiré.

Il ne devrait pas se procurer cet abri.

FIN